435

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ALGEBRA DER LOGIK

(EXAKTE LOGIK).

VON

DR. ERNST SCHRÖDER,

WEILAND PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN

ERSTER BAND.

MIT VIEL FIGUREN IM TEXTE.

Der Mensch ist nicht geboren, das Problem der Welt zu lösen, wohl aber, zu suchen, wo das Problem angeht, und sich sodann in den Grenzen des Begreiflichen zu halten.

Goethe, Eckermann's Gespräche; Okt. 1825.

Ich sag' es dir: ein Kerl, der spekulirt,
Ist wie ein Tier, auf dürrer Haide
Von einem bösen Geist im Kreis herumgeführt,
Und rings umher liegt schöne grüne Weide.

Derselbe (Mephisto).

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
BRONX, NEW YORK

MAR 7 1967

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Anzeige und Vorwort.

„Aus dem Titel wird der Leser ersehen, dass es sich nur um die sogenannte deduktive oder formale Logik handelt. Die rechnerische Behandlung der deduktiven Logik, durch welche diese Disziplin sich loslöst von den Fesseln, worein die Wortsprache durch die Macht der Gewohnheit den Menschengeist geschlagen, möchte wol die Bezeichnung als „exakte Logik“ *vorzugsweise* verdienen. Sie allein auch vermag den Gesetzen des folgerichtigen Denkens den schärfsten, konzisesten und übersichtlichsten Ausdruck zu geben und befindet sich zufolge dieses Vorzugs in der Lage, zahlreiche und bedeutungsvolle Lücken — wo nicht Fehler — der älteren Darstellungen zu offenbaren.

Seit dem Erscheinen von des Verfassers „Operationskreis des Logikkalkuls“ hat diese Behandlung noch höchst bedeutende Fortschritte gemacht: vor allem durch die Arbeiten des Amerikaners Charles S. Peirce und seiner Schule. Namentlich gebührt Herrn Peirce das Verdienst, die Brücke von den älteren blos verbalen Behandlungen jener Disziplin zu der neuen rechnerisch zuwerke gehenden geschlagen zu haben, eine Brücke, welche im Lager der Berufsphilosophen mit Recht vermisst worden und deren Fehlen es wol zuzuschreiben ist, dass die neue Richtung daselbst zum Teil nur mit Befremden aufgenommen wurde. Durch jene Arbeiten, in welche noch Verfasser nicht unwesentlich eingreift, ist die Theorie nun so weit entwickelt und vollendet, dass für einen ersten und Hauptteil des ganzen Lehrgebäudes bereits eine endgültige Darstellung und Anordnung als erreichbar erscheint.

Mit dem Bestreben, solche, soweit es in seinen Kräften steht, zu verwirklichen, verbindet Verf. zugleich die Absicht, von der schon sehr ansehnlichen Literatur, welche besonders in englischer Sprache einschlägig existirt, das Wertvollste in einheitlicher Darstellung zu einem Handbuch zu vereinigen.“

... Soweit die Anzeige. Inwieweit es mir gelungen, obiges Ideal zu verwirklichen, werden Diejenigen zu beurteilen in der Lage sein,

zu überspringen und sogleich mit § 1 in medias res einzutreten: wer solches vorzieht, kann das jeweils Unumgängliche aus unsern Vorbetrachtungen nach Bedarf in die Theorie einschalten.

Für das Vierteljahrhundert*), welches seit dem Erscheinen von Boole's „Laws of thought" nunmehr verflossen, gibt das Buch (noch mannigfach vermehrt) auch eine wol nahezu vollständige Sammlung aller Aufgaben, welche zu denkrechnerischer Lösung seither gestellt worden. —

Grossen Dank verdient jedenfalls der Verleger dafür, dass er es unternommen, eine so umfangreiche Schrift, welche so hohe und neue typographische Anforderungen stellte und sich in Deutschland ihren Leserkreis doch erst wird erobern müssen, zu drucken und in der vorliegenden Weise auszustatten.

Der Umstand, dass die deutsche Übersetzung von Liard's Schrift über die „Logiciens anglais contemporains", welche einer Kritik sich enthaltend nur über deren Arbeiten referirt, bereits die zweite Auflage erlebte, lässt mich indess hoffen, dass für die neue Richtung doch schon in weiten Leserkreisen ein Interesse vorhanden, und dass eine systematische und kritische Überarbeitung *und Weiterführung* dieser Forschungen um so willkommener sein werde.

Ich schliesse mit dem etwas verwegenen Wunsche, dass meine englischen und amerikanischen Mitarbeiter ihre Arbeiten in der meinigen geläutert wiederfinden und aus derselben nicht weniger Anregung und Förderung schöpfen mögen als ich aus den ihrigen geschöpft habe.

Karlsruhe in Baden, im März 1890.

*) Ist zu bemerken, dass „das Vierteljahrhundert" rhetorisch, oder auch als eine nach den Regeln der Arithmetik bezüglich approximativer Zahlen *abgerundete* Zeitangabe aufzufassen ist: es sind nicht ganz, jedoch beinahe, anderthalb Vierteljahrhunderte seit Erscheinen von Boole's Laws of thought (1854) verstrichen gewesen. Vergl. die Besprechung im Literarischen Centralblatt für Deutschland 1891. No. 13.

Inhalt des ersten Bandes.

Seite

Anzeige und Vorwort III

Einleitung.

A. Vorbetrachtungen über Charakter und Begrenzung der zu lösenden Aufgabe mit Bemerkungen über Induktion, Deduktion, Widerspruch und folgerichtiges Denken. Denkendes Subjekt, seine Vorstellungen und die Dinge. (Chiffre $\alpha \,..\, \iota_1$) 1

B. Vorbetrachtungen über Zeichen und Namen. $\varkappa_1 \,..\, o_2$) 38

C. Über Begriffe. Einteilung, Definition und Kategorieen, Pasigraphie. Logik des Inhaltes oder des Umfangs? Über Urteile, Schlüsse und deren Folgerichtigkeit. Warum Algebra der Logik. $\pi_2 \,..\, \xi_3$) 80

Erste Vorlesung.

§ 1. Subsumtion 126

§ 2. Vorläufige Betrachtungen über Darstellbarkeit der Urteile als Subsumtionsurteile 141

§ 3. Euler's Diagramme. Identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit 155

Zweite Vorlesung.

§ 4. Erste Grundlagen: Prinzip I und II, Definition von Gleichheit, 0 und 1, nebst Folgesätzen 168

Dritte Vorlesung.

§ 5. Die identische Multiplikation und Addition. Peirce's analytische Definition von Produkt und Summe 191

§ 6. Kritische Untersuchungen über die gegebene Definition 201

§ 7. Deutung von 0, 1, ab, $a + b$ als Gebiete nebst zugehörigen Postulaten. Konsistente Mannigfaltigkeit 211

Vierte Vorlesung.

§ 8. Interpretation für Klassen 217

§ 9. Fortsetzung. Konsequenzen der Adjungirung einer Nullklasse. Reine Mannigfaltigkeit 237

Fünfte Vorlesung.

Seite

§ 10. Die nicht von Negation handelnden Sätze. Reine Gesetze, von Multiplikation und Addition je für sich 254
§ 11. Gemischte Gesetze, den Zusammenhang zwischen beiden Operationen zeigend 270

Sechste Vorlesung.

§ 12. Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes und Unentbehrlichkeit eines weiteren Prinzipes. — Prinzip zur Vertretung des unbeweisbaren Satzes 282

Siebente Vorlesung.

§ 13. Negation (mit Postulat) und darauf zu gründende Sätze. — Ihre Einführung für Gebiete 299
§ 14. Der Dualismus 315
§ 15. Kritische Vorbemerkungen zum nächsten Paragraphen: Inwiefern negative Urteile als negativ prädizirende anzusehen und disjunktiv prädizirende Urteile von den disjunktiven zu unterscheiden sind 319

Achte Vorlesung.

§ 16. Deutung der Negation für Klassen. Satz des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Mittels und der doppelten Verneinung im Klassenkalkul. Dichotomie. Gewöhnliche Mannigfaltigkeit 342
§ 17. Fernere Sätze für Gebiete und Klassen. Kontraposition, etc. . . . 352

Neunte Vorlesung.

§ 18. Verschiedenartige Anwendungen: Rechtfertigungen, Studien und Übungsaufgaben 365

Zehnte Vorlesung.

§ 19. Funktionen und deren Entwickelung 396

Elfte Vorlesung.

§ 20. Spezielle und allgemeine, synthetische und analytische Propositionen: Relationen und Formeln 434
§ 21. Das Auflösungsproblem bei simultanen Gleichungen und Subsumtionen. Das Eliminationsproblem bei solchen 446
§ 22. Fortsetzung, auch für mehrere Unbekannte 466

Zwölfte Vorlesung.

§ 23. Die inversen Operationen des Kalkuls: identische Subtraktion und Division als Exception und Abstraktion. Die Negation als gemeinsamer Spezialfall beider 478
§ 24. Symmetrisch allgemeine Lösungen 496

Dreizehnte Vorlesung.

Seite

§ 25. Anwendungsbeispiele und Aufgaben 521

Vierzehnte Vorlesung.

§ 26. Besprechung noch andrer Methoden zur Lösung der bisherigem Kalkul zugänglichen Probleme.
Das primitivste oder Ausmusterungsverfahren von Jevons. Lotze's Kritik, und Venn's graphische Modifikation des Verfahrens . . . 559
§ 27. Methoden von McColl und Peirce 573

Anhänge.

Anhang 1. Beiläufige Studie über Multiplikation und Addition. (Zu §6.). 595
Anhang 2. Exkurs über Klammern. (Zu § 10.) 599
Anhang 3. Ausdehnung von Begriff und Sätzen über Produkt und Summe von zweien auf beliebig viele Terme. (Zu § 10.) 609
Anhang 4. Logischer Kalkul mit „Gruppen" — hiernächst von Funktionalgleichungen, mit Algorithmen und Kalkuln. (Zu § 12.) . . . 617
Anhang 5. Substrat zum vorigen Anhang und Material zu dessen Belegen 633
Anhang 6. Zur Gruppentheorie des identischen Kalkuls. Geometrisch-logisch-kombinatorische Probleme von Jevons und Clifford. (Zu § 12, 19 und 24.) 647

Literaturverzeichniss nebst Bemerkungen 700
Namenverzeichniss zum ersten Bande 716

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Einleitung.

A. Vorbetrachtungen über Charakter und Begrenzung der zu lösenden Aufgabe mit Bemerkungen über Induktion, Deduktion, Widerspruch und folgerichtiges Denken. Denkendes Subjekt, seine Vorstellungen und die Dinge.

a) Die *Logik*, im weiteren Sinne des Wortes, beschäftigt sich mit all' den Regeln, durch deren Befolgung die Erkenntniss der Wahrheit gefördert wird. Sie hat es demnach mit den Methoden der Forschung überhaupt zu thun. Sie sucht die Frage zu beantworten: *wie* gewinnen wir Erkenntnisse, auf welchem Wege gelangen wir zu Wahrheit? Mithin, da Erfassen der Wahrheit ein Akt des Denkens ist, dürfen wir als Gegenstand der Logik überhaupt bezeichnen: das *Denken*, sofern es das *Erkennen* zum Endzweck hat.

Es steht dieses erkennende Denken im Gegensatz, vor allem, zum *Dichten*, zum phantasirenden Denken.

Desgleichen blosse *Erzählung* und *Beschreibung*, wenn schon sie nicht ohne Denkthätigkeit zustande kommen und unter sonst gleichen Umständen von einem logisch geschulten Kopfe vielleicht besser in Angriff genommen werden, bilden als solche noch ebenfalls nicht ein Thema der eigentlichen Logik. Ein gleiches wäre von der *gesetzgebenden Thätigkeit* zu sagen. Endlich auch diejenigen Denkvorgänge, welche bei Äusserung unsrer unmittelbaren Empfindungs- und Willenszustände mitspielen, also bei Ausrufen, Wunschäusserungen, Fragen, Bitten und Befehlen, zu denen die Sprache die Interjektionen und Fragepartikeln, sowie die Optativ- und Imperativform der Verba hergibt, gehören nicht in den Bereich der logischen Disziplin.

Mit *Übersetzung* aus einer Sprache in eine andere werden wir uns nur soweit zu beschäftigen haben, als es sich dabei um Übertragung von Aussagen aus unsrer nationalen Wortsprache in eine eigens zu begründende Kunstsprache des logischen Denkens, in die Formelsprache — oder umgekehrt — handelt.

β) Die Wissenschaften pflegen ausser dem Dasein erkennender Subjekte wesentlich vorauszusetzen, dass es auch etwas Erkennbares gebe, eine „Wahrheit", und zwar in Bezug auf jede Frage nur *eine* Wahrheit, die von allen mit der unsrigen gleichartigen Intelligenzen, von allen im Besitz normaler Geisteskräfte befindlichen Menschen, *notwendig* als dieselbe erkannt werden muss, wofern jene sich nur die Mühe geben, sich in gleicher Weise in die für die Erkenntniss derselben günstigen Verhältnisse zu versetzen.

Die Vorfrage aber, *ob* und inwiefern Erkenntniss der Wahrheit überhaupt möglich ist, pflegt einer besonderen Disziplin zugewiesen und in dieser abgehandelt zu werden, die man als *„Erkenntnisstheorie"* bezeichnet.

Man hat dieselbe bald als eine Vorstufe der Logik hingestellt, bald auch hat man versucht, die ihr obliegenden Erörterungen in die Darstellung der Logik selbst einzuflechten.

Davon, dass das Ergebniss dieser Voruntersuchung *bejahend* ausfalle — und dies ist nicht unbestritten — würde hienach die Logik mit ihrer ganzen Existenzberechtigung abhängig erscheinen, wofern wir auch für sie die obengenannte „Voraussetzung der Wissenschaften (im allgemeinen)" in Anspruch nehmen wollten.

Indessen könnte die gedachte Untersuchung doch jedenfalls nur mittelst Beweisführungen oder Widerlegungen, Schlüssen, Argumentationen nach den Regeln eben der Logik geführt werden, deren Existenzberechtigung erst aus ihrem Ergebniss zu entnehmen wäre, und so sähen wir uns von vornherein in einen fatalen Zirkel gebannt, wofern wir wirklich jene Voraussetzung schon für die Logik in Anspruch nehmen müssten.

Gezeigt zu haben, wie über die angedeutete Schwierigkeit hinwegzukommen ist, durch Lieferung des Nachweises, dass die Logik als eine formale Disziplin sich in der That davon auch unabhängig begründen lässt, erscheint vorzugsweise als Herrn Sigwart's Verdienst, und werden wir auf diesen Punkt noch näher einzugehen haben.

γ) Mit ihrem einen — dem gewöhnlich und wol mit Recht als zweiten aufgeführten — Teile, in Gestalt der nach Whately's und John Stuart Mill's Vorgange so genannten *„induktiven* Logik", geht unsre Disziplin speziell auch auf die Grundsätze ein, nach welchen Beobachtungen und Versuche, Experimente anzustellen, nach welchen diese sowie Erfahrungen und Wahrnehmungen überhaupt zur Erweiterung der Erkenntniss zu verwerten sind. Die Logik untersucht hier näher

diese — wenn nicht einzige*) — so doch jedenfalls ursprüngliche und hauptsächliche Quelle des Erkennens, als welche die *Wahrnehmung*, Perzeption, hinzustellen ist.

Sie setzt auseinander, wie aus einzelnen, nötigenfalls sehr zahlreich gemachten Wahrnehmungen**) von unter sich ähnlicher Art durch einen kühnen Prozess der Verallgemeinerung — den „Induktionsschluss", die *„Induktion"* — allgemeine Sätze (Regeln oder Gesetze) ableitbar sind, welche auch die nicht mehr wahrgenommenen Fälle derselben Art in den Bereich unsrer Erkenntniss ziehen, uns Aufklärung über dieselben geben. Doch weist sie nach, dass dieser Aufschluss, diese Information, nicht unfehlbare Sicherheit, dass sie nicht absolute Gewissheit gewähren kann, wohl aber eine mehr oder minder hohe *Wahrscheinlichkeit*, Probabilität beansprucht, deren Grad sich beurteilen oder taxiren, sich abschätzen lässt.***)

Indem die induktive Logik auch auf diese Schätzung ausgeht, nach welcher sich der den Induktionsergebnissen zu schenkende Glaube bemisst, untersucht sie, wie einzelne Induktionen durch andere gestützt und gekräftigt, eventuell auch abgeschwächt oder gar durch neue Wahrnehmungen völlig entkräftet, umgestossen werden, und sucht zu ergründen, wie innerhalb der Schranken des menschlichen Könnens Induktionen anzustellen sind, damit sie möglichst glaubwürdige Ergebnisse liefern.

Auf diese, die induktive Logik, so hochwichtig und interessant sie auch ist, beabsichtige ich hier ganz und gar nicht einzugehen.†)

δ) Wir wollen uns auf ein viel engeres Gebiet beschränken, um

*) Dass Wahrnehmung die Urquelle aller Erkenntniss sei, wird — nachdem die Verfechter „angeborner" Erkenntnisse aus dem Felde geschlagen sind — nur noch von Denjenigen bestritten, die eine „göttliche Offenbarung" annehmen.

Als Wahrnehmung ist hier allerdings nicht blos die so „äussere" Wahrnehmung zu berücksichtigen, welche sich auf den Sinneseindruck stützt, sondern auch die „innere". Z. B. dass ich fröhlich oder traurig bin, spaziren gehen will, und dergleichen, nehme ich nicht durch die Sinne wahr, sondern werde dessen unmittelbar inne. „Wir empfinden auch die Spannkraft unsres Willens und die Anstrengung des Nachdenkens" (Lange).

Vergleiche hierzu noch γ_3) erste Fussnote.

**) Dieselben, wenn bis zur Bildung einer Vorstellung von dem wahrgenommenen Gegenstande entwickelt, heissen „Apperzeptionen".

***) Immerhin mit Einschränkungen — vergl. Herrn Johannes von Kries' gediegene Arbeit über Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung — siehe Literaturverzeichniss.

†) Es sei darüber auf die Werke von Mill², Sigwart², Apelt¹ u. A. verwiesen. Vergl. das Literaturverzeichniss am Schlusse, auf welches die im Text als Exponenten angesetzten Chiffren sich jeweils beziehen.

dasselbe um so gründlicher in Angriff zu nehmen und — in gewissen Richtungen wenigstens — um so vollständiger abzuhandeln, nämlich auf den ersten Teil der heute so genannten Logik, die Logik im engeren Sinne, Logik*) im Sinne der Alten.

Diese, die *„deduktive“* oder auch „formale“**) Logik beschäftigt sich mit den Gesetzen des *folgerichtigen* Denkens.

Worin die „Folgerichtigkeit“ des Denkens bestehe, ist durchaus nicht leicht zu sagen. Ich will die Frage erst einer vorläufigen Besprechung unterziehen, um dann nochmals auf dieselbe zurückzukommen.

Zur Orientirung sei zunächst bemerkt, dass „folgerichtig“ mehr wie „konsequent“ besagt. Man kann auch konsequent verkehrt verfahren, konsequent unlogisch zuwerke gehen. Wenn ich ein Fremdwort, einen international rezipirten wissenschaftlichen Kunstausdruck für „folgerichtiges Denken“ gebrauchen sollte, so wüsste ich dasselbe nicht anders, wie als „logisches“ Denken zu bezeichnen.

ε) Ältere Autoren, wie Drobisch[1] und Ueberweg[1] in ihren so verdienstlichen Werken haben geglaubt, das Kennzeichen der Folgerichtigkeit des Denkens allein in der *Übereinstimmung dieses Denkens mit sich selbst* erblicken zu sollen.

Dass das Denken, wenn es folgerichtig genannt werden soll, zu

*) Den Namen führt die Disziplin bekanntlich zurück auf das griechische λόγος = das Wort, die Sprache, der Sinn, die Vernunft etc. Dass „Wort“ und „Vernunft“ solchergestalt homonym bezeichnet wurden, war nicht ganz ohne innere Berechtigung — in Anbetracht, dass die auf dem Wort beruhende *Sprache* und die menschliche *Vernunft* einander wirklich nicht entbehren zu können scheinen und in ihren successiven Entwickelungsstufen sich gegenseitig bedingen dürften. Die enge Beziehung unsrer Vernunft zur Sprache, von der schon Wilhelm v. Humboldt sagte, dass wir sie uns nicht enge genug vorstellen können, hat Lazarus Geiger zu einem interessanten Versuche veranlasst, die Entstehung der ersteren ganz aus der letzteren zu erklären — ein Versuch, der nach Heymann Steinthal's und Julius Keller's Kritik im wesentlichen als fehlgeschlagen zu betrachten — vergl. noch Benno Erdmann's Rezension in den Göttingischen gelehrten Anzeigen v. 1885 von Keller's Schrift[1], welcher letztern wir obige Angabe über W. v. Humboldt entlehnten.

Nach allem möchte, den menschlichen Verstand als ein durch die Wortsprache erst entwickeltes Erziehungsprodukt zu erklären, noch eben so viel Wahrheit und Übertreibung enthalten, als wie umgekehrt die Sprache das Werk eines konsequent denkenden Verstandes zu nennen.

Dass Letzteres in der That nicht durchaus der Fall ist, werden wir häufig Gelegenheit haben hier wahrzunehmen, wo uns auch eine Kritik dieses immerhin bewunderungswürdigen Instruments des Gedankenausdrucks mit obliegen wird.

**) „formale“ in einem engern als dem S. 2 erwähnten Sinne.

Widersprüchen mit sich selbst nicht führen dürfe, ist unstreitig (auch) eine von diesem zu erfüllende Anforderung.

Wer auf sie das Kennzeichen der Folgerichtigkeit des Denkens zu gründen versucht, ist verpflichtet, zunächst auseinanderzusetzen, was ein *„Widerspruch“* ist.

Mannigfach sind die Arten oder möglichen Formen des Widerspruchs; es gibt deren versteckte oder *mittelbare*, und es gibt auch offene, *unmittelbare* Widersprüche.

Die ersteren vollständig aufzuzählen dürfte als ein hoffnungsloses Beginnen, Unterfangen erscheinen. Zur Charakterisirung der letztern dagegen lassen — an deren sprachliche Ausdrucksformen anlehnend — sich wol unschwer äusserliche Kennzeichen aufstellen.

Der Widerspruch kann schon in einer einzigen Aussage enthalten sein, die alsdann eine „sich selbst widersprechende“ genannt werden mag.

Wer z. B. die Versicherung abgibt: „Ich kann nicht sprechen“ oder wer dem ihn Besuchenden entgegenruft: „Ich bin abwesend, bin nicht zuhause, todt“ und dergleichen, setzt sich dadurch in Widerspruch zu einer schon durch die blosse Existenz eben dieser seiner Aussage verbürgten (und damit einen gegenteiligen Ausspruch herausfordernden) Thatsache.

Wird einem Dinge, wovon gesprochen werden kann, einem Objekte des Denkens, im Prädikat der Aussage ein Merkmal *ab*gesprochen, welches im Subjekt dieser Aussage demselben *zu*gesprochen erscheint (oder umgekehrt), so kann man darin einen Widerspruch der Aussage mit sich selbst erblicken (sogenannte „contradictio *in adjecto*“, d. h. im Prädikate) — so z. B. wenn wir sagten: „Ein kugelförmiger Körper ist nicht kugelförmig“. Es waltet dabei allerdings mit die Unterstellung, dass es kugelförmige Körper gebe, oder dass solche wenigstens denkbar seien. (Vergleiche auch Hegel's vielberufenes: „Sein ist Nicht sein“, und Anderes.)

Ähnlich verhält es sich mit Konditionalsätzen oder hypothetischen Urteilen, sobald der Folgesatz in Abrede stellt, was der Bedingungssatz vorauszusetzen forderte, z. B. „Wenn dies stattfindet, s indet es nicht statt.“ Hier sind die einander widersprechenden Satzteile und Teilsätze von einander abhängig gesetzt.

Als *Wesen des Widerspruchs* wird am besten erklärt die *Beziehung zwischen zwei selbständig hingestellten* Sätzen oder *Aussagen, von denen die eine* in Abrede stellt, *leugnet, was die andre behauptet.*

Gewöhnlich stellt man zwei Urteile: „*A* ist *B*“ und „*A* ist nicht *B*“ als allgemeine Form derartiger Aussagen hin, unter der Voraussetzung, dass unter *A* etwas und zwar in beiden Aussagen genau das nämliche verstanden werde, desgleichen unter *B*. Zum Beispiel, nachdem irgend eine Behauptung gefallen, werden die beiden Aussagen:

„Diese Behauptung ist wahr“, und *„Diese Behauptung ist nicht wahr“* einen reinen Widerspruch bilden.

Der sogenannte *„Satz des Widerspruchs“*, der für die Logik eine fundamentale Bedeutung besitzt, fordert anzuerkennen, *dass einunddieselbe*

Behauptung, im nämlichen Sinne verstanden, nicht zugleich wahr und nicht wahr sein könne.

So drücken ferner die Paare von Sätzen: Der Mars ist bewohnt; Der Mars ist nicht bewohnt, Alle Menschen sind vollkommen; Alle Menschen sind nicht vollkommen, je einen Widerspruch aus — wenn auch vielleicht nicht in der oben als Ideal des reinen Widerspruchs hingestellten Weise — und letzteres würden sie auch noch thun, wenn man statt der Worte „nicht bewohnt", „nicht vollkommen" bezüglich „unbewohnt", „unvollkommen" in ihnen setzte (wo dann für den letzten Satz auch „Kein Mensch ist vollkommen" sich sagen lassen würde.)

Dagegen die beiden Sätze:

Einige Menschen sind klug; Einige Menschen sind nicht klug

drücken keinen Widerspruch aus, schon darum, weil hier das Subjekt derselben dargestellt wird durch den mehrsinnigen, äquivoken Namen „Einige Menschen", unter dem im ersten Satze ganze andere Menschen verstanden werden, wie im zweiten.

Auf die erwähnte Form lassen auch die vorhergehenden Beispiele sich zurückführen, indem man dieselben zusammenhält mit den als selbstverständlich anzuerkennenden Sätzen: „Wenn dies stattfindet, so findet es statt" resp. „Ein kugelförmiger Körper ist kugelförmig".

Ob aber jene zwei Urteile über A und B wirklich und in allen Fällen das Wesen des Widerspruchs in dem darüber erklärten Sinne darstellen, dies zu entscheiden muss eingehenderen Untersuchungen vorbehalten bleiben. (Vergl. § 15.)

Wollen wir vorsichtig verfahren, ganz sicher gehen, so müssen wir als das Vorbild, die *„typische" Form des unmittelbaren Widerspruchs* die Gegenüberstellung zweier Sätze nehmen, welche (wie in der That die vorhin kursiv gedruckten) zum Subjekt einunddieselbe *Behauptung* haben, zum Prädikat aber bezüglich „wahr" und „nichtwahr" oder „gültig" und „ungültig". Direkten Widerspruch erblicken wir zwischen irgend einer (als gültig hingestellten, mit der Versicherung ihrer Gültigkeit abgegebenen) Aussage (zwischen einer „Behauptung") und einer zweiten Aussage, welche die Ungültigkeit der ersten behauptet.

Bei versteckten Widersprüchen kann man verlangen, dass sie auf unmittelbare zurückgeführt werden, und zwar wie? — Nun natürlich wiederum durch folgerichtiges Denken. So kämen wir denn zunächst zu dem Zirkel, für „folgerichtig" dasjenige Denken zu erklären, welches aus sich selbst *und* durch sich selbst nicht zu direkten Widersprüchen führt. Dasselbe dürfte also widersprechende Prämissen (als Überzeugungen) nie zulassen und von (als Überzeugung) zugelassenen Prämissen zu Widersprüchen nie führen. Nun kann man ja aber, ehe man diejenigen Folgerungen oder Denkhandlungen vollzieht, welche den unmittelbaren Widerspruch liefern würden, allemal ganz willkürlich abspringen, und so erscheint die Erklärung als vollkommen nichtssagend, solange ihr nicht die Voraussetzung mit zugrunde gelegt wird,

dass das Denken nach bestimmten Normen, Vorschriften, Schemata oder Gesetzen überhaupt stattfinde oder stattzufinden habe.

Sollen diese Gesetze solche des folgerichtigen Denkens sein, so wird das Denken, wenn es gemäss denselben stattfindet, aus sich selbst nicht zu Widersprüchen führen dürfen.

Immerhin, auch wenn man niemals von *gegebenen* Gesetzen abweicht, bleibt aber die Möglichkeit, durch Enthaltung von gewissen Schlussfolgerungen dem Widerspruch ständig auszuweichen, sich z. B. in einem Zirkel immerfort zu bewegen, welcher solchen Widerspruch nicht berührt. So wenigstens, sobald der Gedankenverlauf durch jene Gesetze nicht vollkommen bestimmt erscheinen sollte — wie wir uns denn in der That bewusst sind (auch bei folgerichtigem Denken) uns doch den verschiedensten Dingen in freier Entschliessung noch zuwenden, beliebigen Stoffs uns bemächtigen, kurz: in sehr verschiedenen Richtungen noch weiterdenken zu können.

Es würde demnach die Widerspruchslosigkeit des „folgerichtigen" Denkens *als Kennzeichen desselben* sich höchstens aufrecht erhalten lassen, wenn sie gefordert wird für den *ganzen* Bereich der nach den Gesetzen dieses Denkens noch möglichen Denkhandlungen oder Schlussfolgerungen.

Ob dies nun eine *hinlängliche* Bestimmung für die Folgerichtigkeit des Denkens ergäbe, scheint eine schwierige Frage zu sein. Für bestimmt begrenzte Gedankensphären, wenigstens, glaube ich dieselbe verneinen zu müssen und dünkt mich, dass gerade die im gegenwärtigen Buch entwickelte Theorie dieses folgerichtigen Denkens Material dafür liefert, um (hiefür) die Unzulänglichkeit jener Begriffsbestimmung besonders schlagend darzuthun.

Hier nämlich wird dieses Denken, auf seinen knappsten Ausdruck reduzirt, sich als ein *Kalkul* darstellen. Nun lassen aber zahllose in sich vollkommen konsequente Kalkuln sich aufstellen, die gleichwol nichts weniger als die Gesetze des logischen Denkens ausdrücken, und die, weil sie derselben Zeichen sich bedienen, doch auch als Gesetze eines gewissen Denkens gedeutet werden könnten. Der logische Kalkul ist in der That nur einer von unzähligen in sich widerspruchsfreien Kalkuln — die aber in ihren Grundgesetzen oft äusserst weit von einander abweichen.

Wofern nur die unbeschränkte Deutungsfähigkeit solcher Kalkuln, ihre Anwendbarkeit auf alle erdenklichen Objekte des Denkens, sich auch von vornherein absehen liesse, würde ich keinen Anstand nehmen, schon überhaupt die Konsistenz, oder Verträglichkeit mit sich selbst,

für allein noch nicht ausreichend zu erklären, um die Gesetze des logischen Denkens zu bestimmen. Solange aber Obiges noch ununtersucht geblieben, brauchen wir zu der Frage auch nicht definitiv Stellung zu nehmen.

Der vorstehend genommene Anlauf dürfte indess schon genügen, um erkennen zu lassen, dass der Versuch, von dieser Seite die Aufgabe in Angriff zu nehmen, in grosse Schwierigkeiten von vornherein verwickeln muss.

Nicht überflüssig scheint es, erinnernd hervorzuheben, dass vorstehende Betrachtung sich beschränkte auf das Gebiet rein deduktiver Denkhandlungen, wobei also eine Berufung auf neue Erfahrungen von vornherein ausgeschlossen war.

Wenn dagegen auch diejenigen Widersprüche mit in Berücksichtigung gezogen werden sollten, welche eintreten können zwischen unsern Denkhandlungen und dem Zeugniss der Sinne, den Thatsachen der Wahrnehmung (genauer den durch letztere unweigerlich provozirten Denkhandlungen oder Urteilen), so dürfte die Frage sich anders stellen.

War auch dieselbe für das erwähnte engere Gebiet vielleicht verneinend zu entscheiden, so bleibt es unbenommen, sie für das weitere Gebiet alles Denkens überhaupt noch in gewissem Sinne zu bejahen, nämlich als das Kriterium der Wahrheit für die Gesamtheit unsrer Überzeugungen doch hinzustellen die durchgängige und widerspruchslose Übereinstimmung alles auf diese gegründeten Denkens mit sich selbst, sofern dieselbe auch bei allem ferneren Zuwachs an Erfahrung sich fort und fort bewährt und von dem Bewusstsein folgerichtigen Schliessens schon gestützt und getragen ist. Jedenfalls wird hierbei (wenn solcher Zustand erreicht) das Denken sich immer schon beruhigen und faktisch jeder Zweifel schwinden.

ζ) Es wird demnach zu billigen sein, dass von neueren Schriftstellern der vorstehend charakterisirte Standpunkt auch nicht mehr eingenommen wird. Vielmehr findet sich von den meisten, die die Frage berühren, der Umstand anerkannt, um welchen sich augenscheinlich durchaus nicht herumkommen lässt, dass dem Begriff des folgerichtigen Denkens eine Annahme, ein Dogma zugrunde liegt, welches sozusagen den „Glauben des Logikers“ bildet.

Wir haben unter β) eine solche Annahme bereits als eine Voraussetzung der Wissenschaften (im allgemeinen) angedeutet, müssen jedoch für die formale Logik die Annahme anders und enger fassen.

In einer durchaus haltbaren Weise scheint mir solches vonseiten Sigwart's geschehen, aus dessen lesenswertem Werke[1] ich hier besonders die Lektüre der Einleitung und namentlich der Paragraphen 1 und 3 der letzteren empfehle.

Die darin gegebenen Ausführungen des genannten Autors vermöchte ich einerseits nicht besser darzustellen und möchte dieselben auch nicht

mit andern Worten wiedergeben und andrerseits sind dieselben doch zu umfangreich als dass es ratsam erscheinen könnte, sie hier wörtlich aufzunehmen.

Wenn ich daher mich damit begnüge — verknüpft mit anderweitigen Betrachtungen —, hier nur den Grundgedanken Sigwart's zur Darstellung zu bringen, so darf nicht verhehlt werden, dass derselbe, solchergestalt herausgerissen aus dem festen Gefüge seiner Ausführungen, vielleicht an überzeugender Kraft verliert.

Folgerichtig oder *logisch* mögen wir (mit Sigwart) das Denken nennen, wenn es für den prüfenden Verstand mit dem Bewusstsein der *Selbstverständlichkeit* oder *Evidenz* verknüpft ist, wenn eine „*Denknotwendigkeit*“ uns zwingt, dasselbe *mit der Überzeugung absoluter Gewissheit* zu vollziehen.*)

Es bedarf diese Erklärung indess mehrfacher Erläuterungen und Ergänzungen.

Zunächst: der rein persönliche Charakter, das subjektive Moment, welches der Folgerichtigkeit des Denkens nach obiger Erklärung anzuhaften scheint, wird aufgehoben, das folgerichtige Denken wird dieser Besonderheit entkleidet durch den Glauben, *dass es eine für alle Intelligenzen verbindliche* — weil eben objektiv begründete — *Denknotwendigkeit gebe.*

„Widersprüche“ kann dieses Denken darum nicht enthalten, auch nicht zu solchen mit sich selber führen, weil es eben dem Verstande unmöglich fällt, solche mit Bewusstsein zu vereinigen, weil jene Denknotwendigkeit uns namentlich zwingt, von zwei einander direkt (kontradiktorisch) widersprechenden Urteilen das eine anzunehmen, das andre zu verwerfen.

Die Induktionsschlüsse können, wie schon angedeutet, die Überzeugung absoluter Gewissheit, ganz unfehlbarer Wahrheit, *nicht* gewähren**) und gehören demnach samt allem empirischen Erkennen, nicht in den Bereich des folgerichtigen Denkens.

Für letzteres bleiben als das Substrat, welches somit das Thema der deduktiven Logik zu bilden hat, nur übrig:

Erstens die sogenannten „*analytischen Wahrheiten*“, „Truismen“, sich darstellend als „*identische Urteile*“ — wofür als ein Beispiel hier nur etwa der Satz angeführt sei: „Alle schwarzen Krähen sind schwarz.“ Es sind das Urteile, welche unabhängig von allen Erfahrungsthatsachen

*) Die Leichtigkeit, mit welcher diese Erklärung auch scheint missbraucht werden zu können, benimmt derselben nichts von ihrer Richtigkeit.

**) Denn was auch tausendmal schon gleichmässig eingetroffen, braucht darum doch nicht das 1001te Mal wieder einzutreffen.

die Überzeugung von ihrer Wahrheit in sich selbst tragen, zu deren Anerkennung wir gezwungen sind kraft des Sinnes, den wir den Worten beilegen.

Mit Lotze[1] (p. 573) zu reden, wäre schon die Thatsache der Selbstverständlichkeit bei solchen Urteilen, bei den „aprioristischen Wahrheiten" merkwürdig.

Soweit dieselben auf die *Zahl* Bezug haben, werden hier diese Urteile grösstenteils den arithmetischen Spezialwissenschaften überlassen.

Im übrigen werden diese, zwar eine unentbehrliche Grundlage alles Denkens bildenden, aber ebendeswegen als überflüssiger Ausdruck des Selbstverständlichen gewöhnlich mit Übermut übergangenen Urteile in diesem Buche eine besonders eingehende Beachtung finden. Unsre Betrachtungen würden uns sogar in den Stand setzen, diese Urteile innerhalb irgend welcher Grenzen, die durch eine nicht zu überschreitende Komplikation ihres Ausdrucks gegeben werden mögen, gewünschtenfalls mit Leichtigkeit auch *vollständig* aufzuzählen.

Zweitens bleibt das denknotwendige *Fortschreiten von schon vorhandenen Überzeugungen**), sei es wirklichen, sei es blos vermeintlichen Erkenntnissen, *zu neuen Überzeugungen* (wirklichen resp. fraglichen Erkenntnissen), das ist eben die eigentliche *Deduktion*. Und deren Gesetze zu erforschen, wird unsre Hauptaufgabe bilden.

Nach dem Gesagten dürfen, wenn jenes Fortschreiten ein rein deduktives sein soll, in dessen Verlauf keine neuen Wahrnehmungen an den Dingen selbst, um deren Erkenntniss es sich handelt, hinzugezogen, es darf nicht an Erfahrungsthatsachen dabei appellirt werden, die nicht unter den „schon vorhandenen", den zum Ausgangspunkt der Deduktion genommenen Erkenntnissen oder Überzeugungen bereits einregistrirt wären. Diese heissen die „*Prämissen*" und die aus ihnen abgeleiteten Überzeugungen oder Erkenntnisse heissen die „*Konklusionen*" der Deduktion; der Übergang von den erstern zu den letztern wird (deduktives) *Schliessen*, *Folgern* genannt.

Gleichwol verzichtet die Deduktion nicht ganz auf das mächtige Hülfsmittel der Wahrnehmung. Zugelassen nämlich sind Beobachtungen an den Namen oder *Zeichen* der Dinge. Gerade in ihren höchsten Formen, wenn die Deduktion die verwickeltsten ihrer Aufgaben *rechnerisch* bewältigt, zeigt sich solches Beobachten der Zeichen als ein wesentliches und charakteristisches Merkmal derselben. Ein Blinder wird bei gleicher Begabung, eben wegen seines mangelhaften Beobachtungsvermögens in der angedeuteten Richtung, dergleichen deduktive Aufgaben nicht so leicht zu lösen im Stande sein, wie ein Sehender. Und auf der Gründlichkeit und Sorgfalt, mit der*) Beobachtungen dieser Art immer ausgeführt werden können, beruht mit die grosse Zuversicht, mit welcher wir die Ergebnisse der Deduktion acceptiren.

*) Diese können auch provisorisch angenommene, können blosse „Annahmen" (Hypothesen) sein.

Indem unter den Prämissen des deduktiven Schliessens auch solche Sätze figuriren können, welche das Ergebniss einer Wahrnehmung an den Objekten der Untersuchung selbst und ferner auch von auf dergleichen Wahrnehmungen gegründeten Induktionsschlüssen darstellen, mithin als absolut zuverlässig nicht angesehen werden dürfen, liefert uns die Deduktion namentlich ein Mittel, die Richtigkeit gemachter Induktionen durch das, was denknotwendig aus ihnen folgt, durch ihre Konklusionen oder Konsequenzen zu *prüfen*. Sobald sich auch nur *eine* von diesen Konsequenzen mit den Thatsachen oder als zuverlässig anzusehenden, ferneren Wahrnehmungsergebnissen unvereinbar erweist, ist mindestens eine von den nicht denknotwendigen Prämissen zu verwerfen. Solange dagegen auch alle ihre Folgerungen sich empirisch bewahrheiten, können die Induktionsschlüsse aufrecht erhalten und zur Grundlage einer „*Theorie*" genommen werden, welche die Erscheinungen zusammenfassend zu beschreiben und zu erklären beansprucht.

Auf diese Weise wird die Deduktion zu einem mächtig fördernden Hülfsmittel aller induktiven Wissenschaften. Wogegen sie ihrerseits, wie wir gesehen haben, der Induktion nicht nur entraten kann, sondern vielmehr dieselbe ausschliefst. Dieser Umstand rechtfertigt auch das Voranstellen der deduktiven vor die induktive Logik.

η) Wenn vorstehend wiederholt von einer „*Denknotwendigkeit*" gesprochen wurde, so ist (mit Sigwart) darauf aufmerksam zu machen, dass sich von einer solchen in zweierlei Sinne reden lässt.

Wir haben eine physikalisch-physiologisch-psychische, die „*psychologische*" oder *subjektive* Denknotwendigkeit zu unterscheiden von der „*logischen*" oder *objektiven*.

Die *erstere* ist der Grund, weshalb ein Mensch gerade so denkt, wie er eben wirklich denkt. „Psychologisch betrachtet mag man alles, was der Einzelne denkt, für notwendige, d. h. gesetzmässig aus den jeweiligen Voraussetzungen erfolgende Thätigkeit ansehen; dass gerade

*) Zufolge des Verharrens, der Beständigkeit oder Permanenz der Schriftzeichen — weil m. a. W. ein x sich nie von selber in ein u verwandelt.

dies und nichts anderes gedacht wird, ist notwendige Folge des Vorstellungskreises, der Gemütsstimmung, des Charakters, der augenblicklichen Anregung, welche das einzelne Individuum erfährt" (Sigwart[1], p. 5 u. 6). Diese Notwendigkeit ist für den Denkenden eine absolute; aber für verschiedene Menschen, und für dieselbe Persönlichkeit bei verschiedenen Gelegenheiten, ist sie oft verschieden; sie gebiert, ruft hervor da richtiges, dort falsches, unlogisches Denken. Thatsächlich wird ja sehr vielfach auch unlogisch gedacht.

Die andre, die *letztere* Notwendigkeit scheint weniger leicht zu fassen. Gerade sie aber, indem sie dem Denken die Folgerichtigkeit vorschreibt (und unter Umständen auch aufnötigt), ist diejenige Denknotwendigkeit, die wir bei obigen Erklärungen im Sinne hatten.

ϑ) Sie würde sich — zunächst als ein noch unverwirklichtes Ideal — charakterisiren lassen als diejenige Notwendigkeit, welche unser Denken beherrschen muss, wofern es seinen Zweck erreichen soll: das Erkennen.

In der That: nicht um *Natur*gesetze des Denkens handelt es sich in der Logik (diese als die Gesetze, nach denen wirklich gedacht wird, bleiben der Psychologie überlassen), sondern um *normative* Gesetze, Gesetze, welche die Richtschnur, Norm des Denkens bilden müssen, damit es jenen Zweck des Erkennens erreiche. Im Hinblick auf ihre Beziehung *zu*, Abhängigkeit *von* diesem Zwecke wäre also diese Denknotwendigkeit auch als eine relative zu bezeichnen.

Sie wäre, genauer gesagt, hinzustellen als der Inbegriff aller der Gesetze, allgemeinen Schemata oder Methoden, durch deren Befolgung man erstens *von richtigen Überzeugungen, Erkenntnissen ausgehend, stets wieder nur zu richtigen Erkenntnissen geführt wird*, und zweitens, sofern solchen Gesetzen etwa auch *selbständige Urteile* entspringen sollten, gemäss welcher *nur absolut gewisse und wahre gebildet werden können.*

Nun frägt sich aber: wie lässt sich solches Ideal verwirklichen?

Empirisch, indem man diese oder jene Gesetze für alle Fälle durchprobirt, gewiss nicht! Nicht allein bleiben auch die für am sichersten gehaltenen unsrer Überzeugungen immer noch der Anzweiflung, Skepsis, ausgesetzt, sondern es wäre jedenfalls auch aussichtslos, die unendliche Fülle der Möglichkeiten erschöpfend durchgehen zu wollen.

ι) Wie lässt sich dennoch jenes objektiv notwendige Denken von dem zufälligen, dem subjektiv verschiedenen unterscheiden? Da wir aus der Jurisdiktion unsrer subjektiven Denknotwendigkeit doch

niemals herauszutreten, uns nie von dieser zu emanzipiren vermögen, so müssten wir solches für ganz hoffnungslos erklären, wenn uns nicht gelegentlich in Gestalt des intuitiven oder unmittelbaren „Einleuchtens" die Empfindung der Evidenz zuhülfe käme, wenn wir nicht an dem Bewusstsein der letzteren jenes erstere Denken erkennten.

Eine leidenschaftslose eingehende Prüfung der Form unsres Denkens durch unsern Verstand verschafft uns (mit subjektiver Denknotwendigkeit) die Überzeugung, lässt es uns als evident erkennen, dass es allgemeine Gesetze für das im obigen Sinne „folgerichtige" Denken gibt, und wie sie beschaffen sein müssen.

Die Erfahrung dieses unmittelbaren Bewusstseins der Evidenz, welches einen Teil unsres Denkens begleitet, und der Glaube an seine Zuverlässigkeit — und demzufolge auch Gemeinverbindlichkeit — ist ein Postulat, über welches nicht zurückgegangen werden kann. *Der Glaube an das Recht dieses Gefühls ist der letzte Ankergrund aller Gewissheit überhaupt.* Wer dieses nicht anerkennt, für den gibt es keine Wissenschaft, sondern nur zufälliges Meinen (Sigwart[1], p. 15).

κ) In dem Streben nach unserm Ziele darf uns sonach die Überzeugung trösten, dass unter bestimmt erkennbaren Umständen die objektive Denknotwendigkeit, auf die wir fahnden, allemal auch zur subjektiven wird. Namentlich fallen beide Denknotwendigkeiten auch immer dann zusammen, wenn es sich um die Vereinigung von unmittelbaren Widersprüchen handelt.

Sehr treffend sagt in dieser Beziehung F. A. Lange[1] p. 27 und 28:

„Der Satz des Widerspruchs ist der Punkt, in welchem sich die *Naturgesetze* des Denkens mit den *Normalgesetzen* berühren. Jene psychologischen Bedingungen unsrer Vorstellungsbildung, welche durch ihre unabänderliche Thätigkeit im natürlichen, von keiner Regel geleiteten Denken sowol Wahrheit als Irrtum in ewig sprudelnder Fülle hervorbringen, werden ergänzt, beschränkt und in ihrer Wirkung zu einem bestimmten Ziele geleitet durch die Thatsache, dass wir Entgegengesetztes in unserm Denken nicht vereinigen können, sobald es gleichsam zur Deckung gebracht wird. Der menschliche Geist nimmt die grössten Widersprüche in sich auf, solange er das Entgegengesetzte in verschiedene Gedankenkreise einhegen und so auseinanderhalten kann; allein wenn dieselbe Aussage sich unmittelbar mit ihrem Gegenteil auf denselben Gegenstand bezieht, so hört diese Fähigkeit der Vereinigung auf; es entsteht völlige Unsicherheit, oder eine der beiden Behauptungen muss weichen. Psychologisch kann freilich diese Ver-

nichtung des Widersprechenden vorübergehend sein, insofern die unmittelbare Deckung der Widersprüche vorübergehend ist. Was in verschiedenen Denkgebieten tief eingewurzelt ist, kann nicht so ohne weiteres zerstört werden, wenn man durch blosse Folgerungen zeigt, dass es widersprechend ist. Auf dem Punkte freilich, wo man die Konsequenzen des einen und des andern Satzes unmittelbar zur Deckung bringt, bleibt die Wirkung nicht aus, allein sie schlägt nicht immer durch die ganze Reihe der Folgerungen hindurch bis in den Sitz der ursprünglichen Widersprüche. Zweifel an der Bündigkeit der Schlussreihe, an der Identität des Gegenstandes der Folgerung schützen den Irrtum häufig; aber auch wenn er für den Augenblick zerstört wird, bildet er sich aus dem gewohnten Kreise der Vorstellungsverbindungen wieder neu und behauptet sich, wenn er nicht endlich durch wiederholte Schläge zum Weichen gebracht wird.

Trotz dieser Zähigkeit des Irrtums muss gleichwol das psychologische Gesetz der Unvereinbarkeit unmittelbarer Widersprüche im Denken mit der Zeit eine grosse Wirkung ausüben. Es ist die scharfe Schneide, mittelst welcher im Fortgang der Erfahrung allmälig die unhaltbaren Vorstellungsverbindungen vernichtet werden, während die besser haltbaren fortdauern.*) Es ist das vernichtende Prinzip im natürlichen Fortschritt des menschlichen Denkens, welches, gleich dem Fortschritt der Organismen darauf beruht, dass immer neue Verbindungen von Vorstellungen erzeugt werden, von denen beständig die grosse Masse wieder vernichtet wird, während die bessern überleben und weiter wirken.

Dieses *psychologische* Gesetz des Widerspruchs bedarf natürlich zu seinem Bestande und zu seiner Wirksamkeit keiner Anschauung. Es ist unmittelbar durch unsre Organisation gegeben und wirkt vor jeder Erfahrung als Bedingung aller Erfahrung. Seine Wirksamkeit ist eine objektive und es braucht nicht erst zum Bewusstsein gebracht zu werden, um thätig zu sein.

Sollen wir nun aber dasselbe Gesetz als Grundlage der *Logik* auffassen, sollen wir es als *Normalgesetz* alles Denkens anerkennen, wie es als *Naturgesetz* auch ohne unsre Anerkennung wirksam ist, dann allerdings bedürfen wir hier so gut wie bei allen andern Axiomen der typischen Anschauung, um uns zu überzeugen . . ."**)

---

*) Auch hier ein „survival of the fittest", Überleben der Tauglichsten. Der Verf.

**) Ich breche das Citat mit Absicht erst bei diesen Worten ab, welche zwar von andern Seiten bestritten, doch jedenfalls für die der Lange'schen Schrift zugrunde liegende Gesamtauffassung bezeichnend sind.

Insbesondre bringt der Gang wissenschaftlicher Forschung es fortwährend mit sich, dass Streit geschlichtet wird durch Verfolgung falscher Sätze in ihre Konsequenzen, und jeder apagogische Beweis ist ein Beispiel dieses Verfahrens (Sigwart[1], p. 13).

λ) Im Hinblick auf die enormen unter den Menschen herrschenden *Meinungsverschiedenheiten* und auf die Thatsachen des *Irrtums* und des *Streites*, scheint auf den ersten Blick ein Glaube an die Gemeinverbindlichkeit folgerichtigen Denkens nur schwer aufkommen zu können.

In diesem Glauben lässt sich die Logik gleichwol nicht beirren. Sie nimmt an, dass jene Fakta nicht sowol im Intellekte begründet sind, als vielmehr ganz andern Ursachen zur Last fallen.

Zumeist entspringen jene Meinungsverschiedenheiten schon aus der Nichtübereinstimmung der Prämissen des Schliessens, deren Erfassung bei verschiedenen Denkern nach verschiedenen Richtungen mangelhaft erscheint und die sich häufig nicht zu dem wünschenswerten Grade der Klarheit im Bewusstsein emporgearbeitet haben, über die denn auch eine hinreichende Verständigung nicht stattgefunden hat. Viele Menschen verschliessen auch ihr Bewusstsein gewissen Erkenntnissen.

Doch, sofern selbst die Prämissen deduktiven Schliessens noch leidlich übereinstimmen, sind die Schlussfolgerungen oft noch verschieden wegen mangelnder oder unvollständiger, nicht gründlich genug vollzogener Prüfung der im Bewusstsein aufgenommenen Objekte des Denkens durch den Verstand vonseiten des einen oder andern Denkenden. Solches kann veranlasst sein durch Denkfaul- (oder zarter ausgedrückt: -träg)heit, Schwerfälligkeit auf der einen Seite, durch die Scheu vor der geistigen Anstrengung nicht nur im gegebenen Falle, sondern auch durch den Mangel an Denkfertigkeit und Gewandtheit, an geistiger Schulung und Disziplin im Denken, welche jene Disposition im Gefolge zu haben pflegt — und der grossen Menge gilt in der That das „Kopfzerbrechen" für die allerunangenehmste Arbeit. Andrerseits wird häufig Ungeduld und Übereilung, ein lapsus attentionis etc., auf das Zustandekommen fehlerhafter Schlüsse hinwirken. So in der That schon bei ganz aufrichtigen Überzeugungen.

Dazu kommt aber noch die Dazwischenkunft, Intervention des Gemütes mit seinen Leidenschaften, welche dahin wirken, dass der Mensch, mitunter sich selbst unbewusst, oder auch sich beschwindelnd, einer in seinem (wirklichen oder vermeintlichen) Interesse liegenden, einer ihm genehmen, erwünschten, schmeichelhaften Konklusion den Vorzug zu geben sucht vor der logisch berechtigten. Namentlich kommt oft das Übergewicht in Betracht, welches die Eitelkeit mit in die Wagschale legt, indem sie den Menschen geneigt macht, bei eingewurzelten, überhaupt bei den einmal von ihm gefassten Meinungen mit dem Dünkel der Unfehlbarkeit zu verharren, und Anderes mehr. Die Logik von Port-Royal[1] schon entrollt uns ein aus feiner Beobachtung hervorgegangenes psychologisches Bild in beregter Hinsicht.

Man könnte auch die Frage aufwerfen, ob für den weiblichen Intellekt dieselbe Denknotwendigkeit verbindlich ist wie für den männlichen.*) Auch die auf diesem Gebiete zutag tretenden Gegensätze schieben wir aber auf Rechnung vor allem der bei beiden Geschlechtern so verschiedenartigen Vorbildung und Schulung des Geistes, sodann auch auf Unterschiede des Temperamentes und der Neigungen, welche beim weiblichen Geschlechte reiner Verstandesthätigkeit im allgemeinen abgewendet sind.**)

Aus alledem geht hervor, dass unser wirkliches Denken in den Urteilen, die es erzeugt, *seinen Zweck häufig verfehlt* (cf. Sigwart[1], p. 9); dass diese Urteile teils von dem einzelnen Denkenden selbst wieder aufgehoben werden, indem die Überzeugung eintritt, dass sie ungültig sind, d. h. dass notwendig anders geurteilt werden muss, teils dass die Urteile von andern Denkenden nicht anerkannt werden, indem diese ihre Notwendigkeit bestreiten, sie für blosse Meinung und Vermutung erklären oder gar ihre Möglichkeit leugnen, sofern über denselben Gegenstand notwendig anders geurteilt werden müsse.

Solche Erfahrungen müssen uns dazu anregen, uns selbst auf die Grundlagen unsres Denkens zu besinnen; in ihnen wurzelt das Bedürfniss einer Disziplin, welche beitragen kann, dem Irrtum vorzubeugen, den Streit vermeiden zu lehren, eventuell ihn zu schlichten, indem sie dem Verstande eine solche Vorbereitung gibt, dass ihm korrektes Denken zur Gewohnheit wird, und so darauf hinwirkt, dass das gemeinverbindliche Denken auch wirklich zum allgemeinen werde.

μ) Wir wollten uns mit den Gesetzen des folgerichtigen Denkens beschäftigen, somit des von einer für alle Intelligenzen verbindlichen Denknotwendigkeit beherrschten Denkens.

Nun kann man fragen: was ist Denken überhaupt, was Notwendigkeit, was sind Gesetze? Würde jemand diese Fragen beantworten, so könnte weiter gefragt werden, was die Worte bedeuten, mit Hülfe deren der Sinn der vorigen zu erklären versucht worden und so weiter

*) Bedeutsam sagt z. B. ein feiner Menschenkenner, Bodenstedt (in Mirza-Schaffy):

Frauensinn ist wohl zu beugen,
Ist der Mann ein Mann und schlau,
Aber nicht zu überzeugen:
Logik gibt's für keine Frau.
Frau'n kennen keine andern Schlüsse
Als Krämpfe, Thränen und Küsse.

**) Nicht ohne Ausnahmen. Wir werden in diesem Werke auch mit den Leistungen einer Dame auf dem Gebiet der rechnenden Logik Bekanntschaft zu machen haben.

in infinitum. Wer diese Fragen fort und fort zu beantworten unternähme, würde in Erinnerung rufen — das Bild des Hundes, der sich in den Schwanz zu beissen sucht; er würde sich immerfort im Ring herum bewegen!

Zudem ist die exakte Beantwortung derartiger Fragen etwas höchst Schwieriges — zumeist wol *ein verfrühtes Unternehmen!*

Und ihr Versuch schon könnte uns von unserm eigentlichen Vorhaben immer weiter abziehen, würde uns möglicherweise gar nicht zu demselben kommen lassen, ja er dürfte uns in Untersuchungen verwickeln, die zu den schwierigsten der Philosophie überhaupt gehören, darunter manche, die Verfasser gern berufeneren Federn überlassen möchte. Daneben aber — und nicht zum mindesten — müsste uns solches Wagniss auch auf Untersuchungsgebiete führen, in Bezug auf welche die Philosophen von Fach noch lange nicht einig sind, wo es annoch heisst: „soviel Köpfe, soviel Sinne", Gebiete, die sich eben einer exakten Behandlung bis jetzt nicht zugänglich erwiesen haben.

Und sich auf Spekulationen in derartigen Gebieten einzulassen, würde als unvereinbar erscheinen mit dem ganzen Charakter der deduktiven Logik, die ja auf das Gemeinverbindliche, unmittelbar *oder mittelbar* Selbstverständliche sich zu beschränken hat, und deren Aufgabe es vorzugsweise ist, in dem Chaos der philosophischen Systeme den gemeinsamen Boden herzustellen, auf dem jedes System fussen muss, den unumstösslich sichern Kern zu gewinnen, um welchen die übrigen Zweige der Philosophie und Wissenschaft überhaupt ankrystallisiren mögen.

Jedenfalls, meine ich, kann es dem Verfasser eines Buches über Logik nicht zugemutet werden, die tiefsten Rätsel des Daseins überhaupt, die schwierigsten Probleme der Metaphysik, Erkenntnisstheorie, Psychologie und vielleicht auch Physiologie schon in dessen Einleitung vorweg zu lösen. Wir können eben hier nur ein *Ideal* aufstellen, und *von dem Standpunkte aus, den jeder Mensch einnimmt, welcher die Sprache beherrscht*, auf dasselbe zusteuern.

Das Ideal ist: *die Gesetze folgerichtigen* (weil als solches einleuchtenden) *Denkens zum Bewusstsein zu bringen*, denselben einen *allgemeinen* und zugleich *möglichst einfachen Ausdruck* zu geben, *sie* namentlich auch *auf möglichst einfache Grundlagen* — auf möglichst wenige Prinzipien oder Axiome — *zurückzuführen*, und überhaupt dieses Denken zu einer *bewussten Kunstfertigkeit* zu gestalten — noch mehr: es in eine Technik zu entwickeln, welche zu irgendwie gegebenen Prämissen oder Annahmen mit leichtester Mühe alle Folgerungen liefere, die nach irgend einer wünschbaren Richtung überhaupt gezogen werden können, auch mit unfehlbarer Sicherheit über die Folgerichtigkeit oder -unrichtigkeit einer Behauptung zu entscheiden, die richtige zu beweisen, die unberechtigte oder falsche zu widerlegen gestatte.

In ihrem ganzen Umfange kann diese Aufgabe begreiflicherweise nicht sofort gelöst werden. Aus dem allgemeinen Hintergrunde derselben hebt sich zunächst ein elementarer Teil hervor, für welchen die Aufgabe nicht nur als lösbar, sondern bereits als definitiv und nahezu vollständig gelöst erscheinen wird (ich meine die im Englischen als „logic of absolute terms" bezeichnete Disziplin). An ihn reiht sich ein höherer Teil (die „logic of relatives"), dessen Behandlung sich mehr noch in den Anfangsstadien ihrer Entwickelung befindet.

Was namentlich den zu allerletzt charakterisirten Teil der Aufgabe betrifft, so muss die künftige Entwickelung der logischen Disziplin erst vollends herausstellen, inwieweit er überhaupt durch allgemeine Methoden lösbar ist, und wann etwa zu seiner Lösung die Spezialwissenschaften einzutreten haben.

Wir könnten uns hienach mit dem bisher Gesagten begnügen, und mit dem Beginn der „ersten Vorlesung" sogleich in medias res eintreten.

v) Um indessen dem ersten unsrer Motti (in welchem ich eine hohe Weisheit erblicke) thunlichst gerecht zu werden, will ich mir noch gestatten, etwas weiter auszuholen, und versuchen, dem Ursprung des logischen Denkens auch noch von einer andern Seite beizukommen, denselben noch eingehender darzulegen, die angedeuteten Rätsel und Probleme wenigstens streifend.

Ich thue dies nicht ohne Widerstreben, hervorgerufen durch das Bewusstsein subjektiver Fehlbarkeit, sowie der bei der unerschöpflichen Vielseitigkeit des Themas höchst wahrscheinlichen Einseitigkeit der Betrachtungen. Ausdrücklich möchte ich mit diesen einleitenden Überlegungen ebenso anspruchslos auftreten, als ich zuversichtlich der alsdann entwickelten Theorie einen hohen Grad von Vollkommenheit in sachlicher Hinsicht zuspreche, und bemerke ich zum voraus, dass auch solche Leser, die mir bei jenen nicht überall zustimmend zu folgen vermöchten, sich mittelst Überschlägung von etlichen Seiten darüber hinwegsetzen mögen und die Korrektheit sowol als Wirksamkeit der alsdann folgenden Ausführungen gleichwol nicht werden bestreiten können.

Im Anschluss an gedachte Überlegungen werde ich zudem schliesslich Gelegenheit und Veranlassung finden, mich über die Eigenart der hier bevorzugten Darstellungsweise der logischen Theorie, und des Buches insbesondere, noch näher auszulassen, dieselbe in gewissem Sinne zu rechtfertigen.

ξ) Der Mensch ist sich seines Daseins unmittelbar *bewusst*, und schreibt sich einen *Geist* zu. Die Existenz des eignen Ich's in der Form der Zeit ist wol (für dieses selbst) die unzweifelhafteste, die unbestreitbarste und auch unbestrittenste von allen Thatsachen.

Von dieser der allersichersten Thatsache sind vorsichtige Philosophen jederzeit ausgegangen und werden solche es auch in Zukunft voraussichtlich thun müssen.

Mit dem *Bewusstsein* aber ist uns ein Mannigfaltiges gegeben. Eine ganze Welt von Empfindungen, Erinnerungen, Vorstellungen und

Strebungen — auch schon fertiger Gedanken und Überzeugungen — findet der reifere Mensch, wenn er anfängt, über sich und die Welt nachzudenken, zu reflektiren, in seinem Bewusstsein bereits vereinigt. Jedenfalls — um nur das allerwenigste zu sagen — vermögen wir *Verschiedenes in unserm Bewusstsein zu unterscheiden*, wir finden Mancherlei in ihm zusammengefasst. Auch ist der Inhalt des Bewusstseins teilweise in Veränderung begriffen; Einzelnes in ihm Vorhandene schwindet aus demselben, nicht vorhanden Gewesenes wird erzeugt, Getrenntes verknüpft, Verbundenes gesondert.

Solche Thätigkeit des menschlichen Geistes, welche wir *Denken* im weitesten Sinne des Worts nennen (mit andern Worten Innewerden, Bewusstwerden), und welche dessen ganzes Dasein ausfüllt, besteht also jedenfalls wesentlich mit in einer *Vereinigung von Mannigfaltigem im Bewusstsein.*

Schon dieser Vorgang hat, genauer besehen, etwas höchst Rätselhaftes, um nicht zu sagen: geradezu Unbegreifliches.

Der naive, der ungeschulte Verstand, der Verstand auch des Mannes der Praxis, der nur gewohnt ist, über die Dinge der Aussenwelt in Bezug auf diese selbst zu urteilen, dagegen vernachlässigt auch nachzudenken über die Vorgänge, welche im denkenden Subjekte hierbei stattfinden (sowie über die Beziehungen zwischen diesen und jenen), mag sich vielleicht mit Erforschung von Unbekanntem, mit der Lösung von Problemen beschäftigen, doch pflegt er nirgends Unbegreifliches zu erblicken. Dass solches wol vorhanden sein müsse*), wird er eventuell erst mit Verwunderung inne, wenn er versucht, in den Sinn der philosophischen Lehrmeinungen einzudringen und auf den Widerstreit von diesen stösst. Wer dann aber, mit der Vorsicht, zu welcher die Wahrnehmung solcher Diskrepanz auffordern muss, ernstlich strebt in den Born der Erkenntniss einzudringen, wird fast auf Schritt und Tritt gewahr, wie wenig gefestet, bestimmt und vollendet auch die ihm geläufigsten Begriffe sich erweisen, ja wie wenig oft die für unerschütterlich gehaltenen Grundlagen seines gesamten Denkens feststehen.

o) Um jenen Vorgang der Zusammenfassung oder Verknüpfung von Mehrerlei zu einer Einheit im Bewusstsein auf sein einfachstes Urbild zu reduziren, fassen wir einmal den Fall in's Auge, wo das denkende Subjekt *nur zwei* Dinge, z. B. Sinneseindrücke in seinem Bewusstsein vereinigt. Die Sache wird am deutlichsten, wenn wir diese aus verschiedenen Sinnesenergieen entlehnen.

Man hört den Knall des nahen Blitzes, während der Lichteindruck desselben noch nachklingt. Es sind ja wol verschiedene Organe des

*) Schon das blosse *Dasein* kann dafür gelten, wie denn jener indische Weise, dessen L. Büchner Erwähnung thut, sich jeden Morgen von neuem wunderte, dass überhaupt etwas *ist*, und nicht *nichts* ist.

Körpers, welche den Schall und den Lichteindruck aufnehmen und dem Träger des Bewusstseins, dem Gehirne übermitteln; auch von letzterem mögen noch verschiedene Teile bei der Übernahme der beiderlei Botschaften vorzugsweise beteiligt sein. Gleichwol ist der Vorgang von ganz anderer Natur, als wenn etwa *ein* Wesen, das blos zu hören vermag, den Donner vernähme, und *ein anderes* Wesen, das blos sieht, das Aufleuchten des Blitzes wahrnähme, welche beiden Wesen nimmermehr auf einander einzuwirken, einander etwas mitzuteilen, von einander zu wissen in der Lage wären, weil das erste zur Aufnahme von Lichteindrücken unfähig, blind, das zweite taub wäre. Vielmehr ist es *ein* einheitliches Bewusstsein, in welchem beide Eindrücke zusammenfallen, koinzidiren, in eins verschmelzen (das heisst doch wol: sich ver-*ein*-igen), und dennoch unterscheidbar bleiben!

Dasselbe, wie in Bezug auf diese verschiedenartigen Sinneseindrücke, würde sich auch ausführen lassen in Bezug auf die verschiedenen Eindrücke, welche uns von einerlei Sinnesorgan übermittelt werden, z. B. für den Fall, wo wir zwei Lichtpunkte, oder sagen wir zwei Kreidestriche auf der Schultafel, gleichzeitig wahrnehmen. Treffen auch die von beiden Strichen entsendeten Strahlen, fallen ihre (umgekehrten) Bilder auch auf verschiedene Stellen der Netzhaut, so werden schliesslich doch die Eindrücke beider im selben Bewusstsein vereinigt, und in dieser Hinsicht würde die Sache nicht anders liegen, wenn etwa der eine der beiden Striche, oder auch beide, anstatt wahrgenommene, blos vorgestellte, Erinnerungsbilder z. B. wären.

Die Annahme, es sei gar nicht möglich, zwei (wahrgenommenen oder blos gedachten) Dingen zugleich Aufmerksamkeit zu schenken, vielmehr springe letztere immer nur zwischen beiden hin und her, scheint der Schwierigkeit, die sie zu heben trachtet, nicht mit Erfolg aus dem Wege zu gehen. Es ist doch jedenfalls zuzugeben, dass wir zwei Striche — mit dem Augenmaass z. B. — nach ihrer Länge *vergleichen* können, und dieses wäre ganz undenkbar, wenn nicht wenigstens ein Erinnerungsbild vom einen festgehalten und zum andern mit herübergenommen würde, in Bezug auf welches wir eben zu beurteilen vermögen, ob es mit diesem sich deckt oder nicht. Die so überaus häufige Thätigkeit des Geistes, welche auf die Wahrnehmung oder Herstellung von *Beziehungen* zwischen Objekten des Denkens hinausläuft, scheint deren gleichzeitige Betrachtung zur unerlässlichen Voraussetzung zu haben. Nie würden wir — um noch ein anderes Beispiel zu wählen — ein Wort zu lesen im Stande sein, wenn im Bewusstsein nicht (die Auffassung von) mehr als *ein(em)* Buchstaben auf einmal Raum hätte. Nicht nur blos gewissermassen schlummernd, latent im Bewusstsein überhaupt, sondern selbst im Felde der Aufmerksamkeit vermögen wir also zwei oder mehrere Wahrnehmungen oder auch Vorstellungen zu vereinigen.

Als auf ein anderes Beispiel sei auf die kombinirten Töne und Harmonieen noch hingewiesen.

Diese Ver*ein*igung, „In-eins-setzung" von *Zwei-* oder Mehrerlei, diese Herstellung einer „*Vieleinigkeit*", welche sich im Bewusstsein des denkenden Sukjektes vollzieht, ist das, was ich als das Unbegreifliche des Vorgangs bezeichne.*) Der Versuch, die Herstellung zweier Bilder an verschiedene Stellen des Hirns zu verlegen — wenn man doch dem letztern insbesondere, und der materiellen Welt überhaupt, Wirklichkeit zuschreiben will — lässt deren Wechselwirkung aufeinander, lässt die Einheitlichkeit des Bewusstseins, der Versuch, sie an dieselbe Stelle (oder dieselben Stellen) zu verlegen, lässt ihre Unterscheidbarkeit wol unbegreiflich erscheinen.

π) Einerlei, wie die Wissenschaft in vorgeschritteneren Stadien sich das Wesen dieses Vorgangs auch zurechtlegen wird, so haben wir uns hier mit der Thatsache abzufinden, dass in dem einheitlichen Bewusstsein des Ich's gar Mannigfaltiges verknüpft, zusammengefasst oder vereinigt erscheint, dass wir unmittelbar inne werden einer *Mannigfaltigkeit* (wie gesagt) von Empfindungen und Vorstellungen, Gemütszuständen und Willensstrebungen, welche teilweise als sich forterhaltend oder neu immer wieder erzeugend, teilweise als im Wechsel oder Fluss, in Änderung befindlich sich uns offenbart (zuweilen sich zu eigner Thätigkeitsäusserung steigernd), und in welcher sich namentlich auch die Gedanken entwickeln.

Dieser mannigfaltige Inhalt des Bewusstseins mit seinen aufeinanderfolgenden (genauer: sich an einander reihenden) Zuständen, seinen successiven Phasen, füllt das Leben des Individuums oder denkenden Subjektes aus. Er ist eine Welt für sich, ein (Mikro-)Kos-

*) Wer an paradoxen Aussprüchen Freude hat, könnte sich, sofern er obigen Ausführungen folgte — m. a. W. im Hinblick auf das hervorgehobene Mysterium der Zweizahl, Mehrzahl, der Vieleinigkeit im Bewusstsein, oder wie man dasselbe nennen mag — wol versucht fühlen, dem Hegel'schen Ausspruch: „*Sein* ist *Nichtsein;* dieser Widerspruch löst sich auf im *Werden*" - welchen ich in dieser Fassung Herrn Kuno Fischer's Logik entnehme — einen andern an die Seite zu setzen: „*Zwei* sind *eins;* dieser Widerspruch löst sich auf (verwirklicht sich) im *Innewerden* (Bewusstwerden)." Sonst allerdings sind zweie nirgends eines.

Wenn — im Ernste gesprochen — ein denkendes Subjekt *A* im Geist zwei Dinge *b* und *c* zugleich erschaut, so erzeugt sich in diesem Geiste *eines* (*ein* „Ding"): die Anschauung von „*b* nebst *c*", aus welcher nicht nur diejenige von *b*, oder die von *c*, jeden Augenblick losgelöst und isolirt zu werden vermag, sondern in welcher sogar, obzwar sie „eins geworden", diese beiden Anschauungen auch stets gesondert, als zweie, empfunden sind.

mos, den wir kurz, wenn auch nicht erschöpfend, die Ideenwelt, *Gedankenwelt* des Individuums nennen mögen.

ϱ) Was uns zur Anerkennung auch des Makrokosmus, der *Aussenwelt* nötigt, zwingt, ist die schon von früh auf gemachte und seitdem fast unaufhörlich wiederholte Wahrnehmung resp. innere Erfahrung, dass wir über gewisse Teile der uns unmittelbar bewussten Gedankenwelt nicht willkürlich verfügen können.

Schon der Säugling kann das Gefühl des Hungers nicht willkürlich beseitigen, kann sich dem Eindruck blendenden Lichtes, wenn er etwa schlafen möchte, nicht verschliessen. Andere Teile unsrer Gedankenwelt, dagegen, sind wir uns unmittelbar bewusst, selbstthätig, frei, nach unserm Willen zu gestalten. Wir können uns z. B., sobald es uns beliebt, einen grünen Tannenbaum vorstellen, oder, wenn wir mögen, auch einen schneebedeckten, desgleichen rote Farbe, etc. etc. Wir mögen uns angenehmer Erlebnisse, einer hübschen Melodie erinnern und uns auch bessere Zustände hoffnungsfreudig ausmalen. Schwerer schon fällt es, unangenehme Erinnerungen los zu werden.

σ) Einzelnes, was in unser Bewusstsein eintritt, empfinden wir *unangenehm* als Schmerz, Leid, Ärgerniss, Kummer; Manches lässt uns als ein gleichgültig Empfundenes *indifferent*, Anderes empfinden wir als *angenehm* mit Genuss, Lust, Wohlbehagen, Freude. Jenes erstere veranlasst uns, die Beseitigung, dieses letztere, die Fortdauer, eventuell Wiederholung seiner selbst zu erstreben. Abermaliges Rätsel: das Wesen der Affekte, von Zu- und Abneigung, von Schmerz und Lust.

Dass beides, wenn auch vermutlich davon bedingt und stets davon begleitet, nicht — wie nach der materialistischen Weltanschauung — *lediglich* in Bewegungszuständen, in einem mehr oder weniger rhythmisch ausgeführten Tanze unsrer Gehirnmoleküle bestehen könne, dass auch der vollendetste Automat noch kein fühlender Mensch wäre, *Empfindung* überhaupt nicht auflösbar ist in *Bewegung*, steht mir vorderhand dogmatisch fest. Dafür gegebene „Beweise" vermag ich indessen als solche nicht anzuerkennen.

τ) Durch unsre physischen und psychischen Triebe, durch die Abneigung, auch Furcht, vor Schmerz, sowie die Erwartung von, Aussicht auf Genuss bedingt, bilden sich Wünsche in uns aus, werden wir uns gewisser Willensstrebungen, eines bestimmten *Wollens* unmittelbar bewusst; wir nehmen Willensakte in uns vor. Und diese Thatsache des Vorhandenseins eines menschlichen *Willens* nun hängt auf das innigste mit der Anerkennung der Aussenwelt zusammen; sie scheint geradezu eine Vorbedingung*) zu dieser zu bilden, indem die

*) Auch umgekehrt würde unser Wille unfähig sein in die Erscheinung zu treten ohne das Hinzukommen der Aussenwelt als eines Gegenstandes, an welchem derselbe sich erprobt, bethätigt und übt.

letztere in dem erkannten Unvermögen wurzelt, das Gewollte sofort, durch blosse geistige Thätigkeit des Ich in allen Fällen zu verwirklichen.

Das Wesen des Willens bildet ein vielbehandeltes und gleichwol noch nicht ergründetes Thema. Es ist eine Frage, welche die Philosophen zur Zeit noch in zwei grosse Lager spaltet: ob der menschliche Wille *wirklich frei* sei (und was ist Freiheit?), oder ob — mit Spinoza — die menschliche Freiheit, deren Alle sich rühmen, lediglich darin besteht, „dass die Menschen sich ihres Wollens bewusst und der Ursachen, von denen sie bestimmt werden, unbewusst sind"; dergestalt, dass die Gedanken und Handlungen des Menschen lediglich eine Funktion sind („Funktion" im mathematischen Sinne) der Zustände, aus denen der Mensch hervorgegangen, der inneren und äusseren Umstände, unter deren Herrschaft er gerade steht — eine Weltanschauung, nach welcher z. B. ein Mensch, der, wie er meint, freiwillig den Arm aufhebt, vergleichbar wäre einer (nur allerdings mit Bewusstsein begabten!) Marionette, die, während ihr mit naturgesetzlicher Notwendigkeit der Arm durch einen Draht emporgezogen wird, blos in dem Wahne stünde, denselben selbst zu heben.*)

Die Frage ist von tiefgreifendster Bedeutung namentlich für die Rechtspflege und für die Beurteilung jenes schlimmsten aller Übel — der Schuld.

Unleugbar zeigen nun die Fortschritte der Naturforschung, besonders auf dem Gebiete der Physiologie und Psychiatrik, unterstützt auch durch die Statistik der menschlichen Gesellschaft, eine stetig steigende Tendenz, das Gebiet der möglicherweise noch für frei zu haltenden, nämlich einer nachweisbar zwingenden Bestimmung entbehrenden Lebensäusserungen des Menschen einzuengen; und es mögen darum Naturforscher und Irrenärzte mehr zu der letzterwähnten Ansicht neigen. Ich stehe meinerseits nicht an, mich zu derselben zu bekennen, und zwar meine ich, dass schon ein Jeder zu demselben Ergebniss kommen muss, wofern wir nur ohne vorgefasste Meinung uns selbst darauf besinnen, was denn eigentlich in uns vorgeht, wenn wir einen Entschluss zu fassen haben? Kommt uns kein Zweifel an bezüglich dessen, was in einem gegebenen, vorliegenden Falle zu thun sei, so handeln wir entweder instinktiv nach einem unbewusst und ohne unser Zuthun von Natur in uns entstehenden Impu , oder wir folgen dabei sozusagen mechanisch einer schon von früher überkommenen (und seinerzeit naturgesetzmässig erworbenen) Gewöhnung. Von freier Entschliessung wird erst dann zu sprechen sein, wenn mehrere Möglichkeiten des Handelns sich dem Geiste zur Auswahl darbieten, m. a. W. wenn wir im Zweifel sind, was thun. Hier dürfte nun die Thatsache nicht in Abrede zu stellen sein, dass sooft wir so für eine Handlun uns zu entscheiden haben, es wiederum von unserm Willen völlig unabhängig erscheint, *welche* Erinnerungen, Vorstellungen und Überlegungen sich uns bis zum

*) Wahrscheinlich ist dieser Vergleich eine Reminiscenz aus einer früheren Auflage von Herrn Ludwig Büchner's „Kraft und Stoff"; in der mir vorliegenden 16. Auflage — Leipzig 1888, 512 Seiten — habe ich denselben jedoch vergeblich gesucht.

Moment des Handelns aufdrängen, und welche zuletzt das Übergewicht erhalten, die That bestimmend.

Des weiteren sei in Bezug auf die angeregte interessante Frage auf Herrn Emil du Bois-Reymond's bekannte Schrift „Die sieben Welträthsel" und den darin citirten merkwürdigen Ausspruch des Abbé Galiani verwiesen. Die Arbeit von Ludwig Dieffenbach[1] bekundet grosse Belesenheit des Verfassers und betrachtet mit Scharfsinn auch juristische Fragen vom deterministischen Standpunkte.*) Von Neueren behandelt Riehl[2] Bd. 2, p. 216 sqq. das Problem der Willensfreiheit besonders eingehend und, wie mir scheint, in mustergültiger Weise.

Ich würde es, nebenbei gesagt, für einen grossen Segen halten, wenn die Überzeugung von der Naturnotwendigkeit alles menschlichen Denkens und Handelns Gemeingut aller Gebildeten würde. Diese Weltanschauung, welcher unter den Dichtern der Neuzeit Herr Arthur Fitger prägnanten und poetischen Ausdruck verliehen, müsste — im Einklang mit dem schönen Gebot der Nächstenliebe und vielleicht wirksamer als diese nur allzuoft nicht vorhandene oder fast unmögliche — naturnotwendig dahin wirken, der Animosität, dem Hass und der Verdammungssucht jeglichen Boden, auf dem sie gedeihen könnten, zu entziehen und auch ein gutes Teil Überhebung aus der menschlichen Gemeinschaft zu tilgen. Sofern die Handlungen des Individuums in erster Linie vom Stande seiner Einsicht abhängig, durch diesen sich bestimmt erweisen, würde sich für einen Jeden das praktische Gebot ergeben, vor allem auf Richtigstellung, Hebung und Vertiefung der Einsicht — eigner, wie fremder — bedacht zu nehmen. Bei der Beurteilung des Nebenmenschen würde man stets die in Madame de Staël's klassischem Spruche: Alles verstehen hiesse alles verzeihen, „Tout

*) Für jede Weltanschauung, ja fast für jede Ansicht, hat die Philosophie einen „. . . ismus" als Namen parat. Da gibt es einen Nominalismus, Realismus und Konzeptualismus, einen Materialismus, Sensualismus, Naturalismus und Rationalismus, einen Idealismus, Spiritualismus, Spiritismus, Supernaturalismus und Mysticismus, einen Eklekticismus, etc. und nicht genug damit: es müssen auch noch Personennamen zu weitern „. . . ismussen" herhalten wie in Platonismus, Skotismus, Kantianismus, Schopenhauerianismus etc.

Wer sich über die damit zu verbindenden Begriffe und ihre im Lauf der Jahrhunderte zum Teil recht schwankenden Bedeutungen orientiren will, mag ein gutes Konversationslexikon zu rate ziehen. Hüten aber muss man sich davor, eine Ansicht über die Dinge, schon darum, weil sie eine derartige Benennung gefunden hat, nunmehr für einen längst abgethanen und überwundenen Standpunkt halten zu wollen. Nicht wenige dieser „. . ismusse" floriren noch lustig weiter und hängen eben mit fundamentalen Fragen zusammen, welche die Philosophie noch keineswegs zum Austrag zu bringen vermocht hat.

Mit unsrer Einleitung gingen wir unsrer Überzeugung gemäss aus vom *„idealistischen"* Standpunkte. Die oben vorgetragenen (damit sehr wohl verträglichen) Anschauungen über die Willensfreiheit, *nach welchen auch der Mensch* mit seinem Fühlen, Thun und Denken *keine Ausnahme in der allgemeinen Gesetzmässigkeit der Natur bildet,* führen den Namen des *„Determinismus"*, und werden die Gegner dieses Standpunktes auch als „Indeterministen" bezeichnet.

comprendre, c'est tout pardonner" (als Subjekt) enthaltene Voraussetzung zu verwirklichen suchen und damit eine Erkenntniss zu gewinnen streben, deren Erwerbung durch jene oben genannten Affekte in der Regel voreilig verhindert wird. Jene Weltanschauung müsste endlich die Mahnung in sich schliessen, bei dem Kampfe gegen das Übel in dem Verfahren gegen Übelthäter nicht über das zum Schutze des Einzelnen und der Gesellschaft erforderliche Maass hinauszugehen.

Wir brauchen indess zu obiger Frage *hier* keine Stellung zu nehmen, und genügt uns die Thatsache, dass unser Wille — sei er auch von einer uns unbewussten Notwendigkeit durchaus bestimmt, sei unsre Willensfreiheit auch nur Illusion — doch innerhalb unsres Bewusstseins wenigstens als frei erscheint, nämlich als ein freier unmittelbar empfunden wird. Diese Thatsache ist nicht nur unbestritten, sondern: dass wir überzeugt sind, frei zu denken, und auch (innerhalb der Grenzen des uns physisch Möglichen) frei zu handeln *glauben,* bildet sogar eine der am tiefsten eingewurzelten menschlichen Überzeugungen. (l. l. c. c.)

v) Demjenigen nun, was in unserm Bewusstsein als *unfrei* empfunden wird, sich dem unmittelbaren Einfluss unsres Willens entzieht, schreiben wir *eine ausser uns liegende Ursache* zu, und die Gesamtheit dieser Ursachen, denen wir ein eigenes Dasein, eine selbständige Existenz — ähnlich der unsrigen (genauer: derjenigen des Ich's) — beilegen, bildet für uns das Nicht-ich oder die *Aussenwelt.*

So, was wir sehen, hören, tastend fühlen, etc., gestaltet sich (als eine unfreiwillige Empfindung) zunächst zur Anschauung von etwas ausser uns Befindlichem. Der passiv empfangene Sinneseindruck löst in der Regel, um als Empfindung in's Bewusstsein einzutreten, eine rezeptive Thätigkeit des Geistes aus, und diese setzt sich noch über die Empfindung hinaus fort, indem sie Veranlassung wird, dass wir (aktiv) uns eine *Vorstellung* bilden von dem Gegenstand, der sie hervorruft.

Namentlich ist bekannt, wie wir so die Eindrücke der Farbenverteilung und Helligkeitsverhältnisse, die wir aus einem zweidimensionalen Gesichtsfelde empfangen, in den (in einen vorgestellten dreidimensionalen) Raum hinaus verlegen.

Bei der Bildung der Vorstellungen spielt übrigens die Induktion, obwol meist unbewusst geübt, schon eine grosse Rolle. Sie z. B. ist es, die uns veranlasst, *denselben* Tisch, den wir sehend als ausgedehnt resp. raumerfüllend wahrnehmen, auch mit Widerstandskräften auszustatten, dergleichen sich uns beim Anfassen desselben kund geben. Mit Induktionsschlüssen beteiligt sich der *Verstand* schon bei der Vorstellungsbildung; er vereinigt oft die aus verschiedenen Sinnesorganen ihm zuteil gewordenen Botschaften zur Gesamtanschauung eines Dinges, das sie veranlasste.

Besonders sind es Gesichts-, Tast- und Muskelsinn*), aus deren

*) Bekanntlich sollte man eigentlich von *sieben* Sinnen sprechen — zum wenigsten. Denn nicht nur ist das Funktioniren des Tastsinnes ein zwiefältiges

Eindrücken wir, ihre Ursachen lokalisirend, unsre Vorstellung der materiellen Körperwelt mit ihrer dreifachen räumlichen Ausdehnung, ihren Widerstands- und andern Kräften und ihren Bewegungsvorgängen herausentwickelt, uns konstruirt haben.

φ) Wir bethätigen dabei das unser gesamtes Denken beherrschende *„Kausalitätsprinzip"**): für Alles, was in den Bereich desselben tritt, eine *Ursache* anzunehmen — sonach, sofern wir nicht uns selbst als diese Ursache fühlen, dieselbe ausserhalb zu setzen.

χ) Als ein Teil dieser von uns vorgestellten materiellen Welt findet auch unser körperlicher *Leib* seine Stelle. Im gewöhnlichen Leben zum Ich gerechnet, muss er von der Philosophie doch der Aussenwelt, dem Nicht-ich zugezählt werden. Wenn nämlich auch die Vorstellung, dass wir ihn besitzen, im Bewusstsein stets mehr oder minder lebendig ist, so existirt er doch nicht ganz allein in der Ideenwelt des Ich's und bildet mit seiner Gestalt und Schwere, seinem Aufbau aus Zellen, seinem Gefässsysteme und den darin kreisenden Blutwellen, seinen mannigfachen uns unbewussten Lebensfunktionen, doch keinen freien (d. h. wie gesagt als frei empfundenen) Bestandteil unsres Bewusstseins. Wäre dem so, so würde Jedermann dasjenige

als *Druck*sinn und als *Wärme*sinn, welcher letztere auch dem Geschmacksinn beigegeben, sondern ist dazu neuerdings auch der *„Muskelsinn"*, das Gefühl für Muskelanstrengung, getreten. Dieser letztere Sinn ist es z. B., durch welchen wir im stockfinstern Keller eine am leeren Hals gefasste volle Flasche von einer leeren unterscheiden; auch beruht auf den zur Accomodation der Augen und Konvergenz der Augenaxen erforderlichen Anstrengungen der Augenmuskeln ganz wesentlich das Schätzen der Entfernungen, in welchen sichtbare Gegenstände sich von uns befinden. Vergleiche besonders v. Helmholtz's „Thatsachen der Wahrnehmung", sowie die auf S. 73 der Schiel'schen Übersetzung von Mill[1] citirten englischen Werke, als: Brown's Lectures, Mill's Analysis of the mind, Alexander Bain, The senses and the intellect, Herbert Spencer's Principles of psychology (Kapitel über die Wahrnehmung), u. a.

*) Nach Schopenhauer[1] sind vier Wirkungsweisen dieses Prinzips zu unterscheiden, indem dasselbe uns zwingt, einen „zureichenden Grund" anzunehmen für das *Sein*, das *Werden*, das *Erkennen* und das *Handeln*. Nur für den zweiten Fall sollte nach ihm der obige Name angewendet werden. Der erste scheint mir, nebenbei gesagt, von S. unklar formulirt und überhaupt nicht haltbar, vielmehr wesentlich in dem dritten Falle aufgehen zu sollen, welcher seinerseits den beiden übrigen nicht koordinirt zu setzen ist, sondern in einem gewissen Sinne über denselben steht.

Als auf eine der besten mir bekannten Schriften über das Kausalitätsprinzip im engern Sinne sei hier auf Herrn Heinrich Weber's Königsberger Prorektoratsrede[1] verwiesen.

Antlitz, das ihm am schönsten oder gerade am wünschenswertesten dünkt, besitzen, diejenige Körperkraft, die er sich wünscht, ebendadurch erlangen etc.

Die Beziehungen des Leibes, als des dem Ich immerhin am nächsten stehenden Teils der Aussenwelt zu diesem, sind mehrfacher Art.

Erstens: Durch die nach seiner Oberfläche, Peripherie, gehenden Nervenenden, die sich an einzelnen Stellen zu spezifischen Sinnesorganen vervollkommnen und ausgestalten, wird der Leib zum ausschliesslichen Werkzeug, vermittelst dessen die ausserleibliche Aussenwelt auf uns einzuwirken vermag, spielt er die Rolle des allezeit bereiten Boten, welcher, die „peripherischen" Sinnesreizungen dem Bewusstsein übermittelnd, dem Geiste von dieser Aussenwelt Kunde bringt.

Zweitens: Zufolge seiner eigenen Beschaffenheit, seiner physiologischen Verfassung, Konstitution, entstehen in ihm selbst auch „viscerale" Reize, wie das Atmungsbedürfniss, Hunger, Durst, Drang jeder Art, durch welche er unabhängig vom Willen des Individuums physische Triebe in dessen Bewusstsein wachruft. Auch können noch hierher gerechnet werden jene (krankhaften) Sinnestäuschungen, die wir erst unter Beihülfe induktiver Schlüsse von sinnlichen Wahrnehmungen zu unterscheiden vermögen.

Drittens endlich: Indem sich gewisse Willensakte unmittelbar in Bewegungen und Kraftentwickelung, Arbeitsleistung seiner Gliedmaassen umsetzen, erscheint der Leib auch als das wiederum einzige*) Werkzeug, durch welches seinerseits der Geist auf die Aussenwelt einwirken kann, deren kommende Zustände beeinflussend.

Die sowol unwillkürlichen als unbewussten Wechselwirkungen zwischen Geist und Leib (deren Vorhandensein wir gleichwol durch induktive Schlüsse erkennen), wie z. B. die Wirkung von Kummer oder Freude auf das körperliche Wohlbefinden, können hier ausser Betracht gelassen werden.

ψ) Wir haben uns hier der gewöhnlichen Ansicht angeschlossen, der die selbständige Existenz der Aussenwelt, und in ihr auch die unsrer Nebenmenschen, für unzweifelhaft, für ausgemacht gilt.

Dem gegenüber steht bekanntlich die Weltanschauung eines hervorragenden Metaphysikers: George Berkeley's, nach welcher ganz allein der Geist existirte, die Aussenwelt aber keine Wirklichkeit besässe, vielmehr nur eine Vision, und ihre Objekte dem Ich von einem göttlichen Geiste vorgespiegelte Wahngebilde, subjektive Erscheinungen wären, das Leben also

*) Das Axiom: *„Es gibt keine geistige Einwirkung ohne materielle Vermittelung"* ist die Basis, auf welcher die gesamte Naturwissenschaft steht. Wer dieselbe nicht anerkennt, ist dem *Aberglauben* in jeglicher Form preisgegeben.

gleichwie ein Traum sich abspielte. Solche Ansicht (selbst wenn in die Leugnung der Aussenwelt auch die der Nebenmenschen samt ihrem Geiste noch eingeschlossen würde) lässt allerdings sich weder beweisen noch widerlegen; es bleibt dem Belieben anheimgestellt, sie anzunehmen oder zu verwerfen.

Auch sie gibt übrigens ein Nicht-ich zu, bestehend aus der Gesamtheit der von dem Ich unabhängigen (als von ihm unabhängig empfundenen) durch eine Notwendigkeit ihm oktroyirten Vorspiegelungen. Für unsre Zwecke ist es gleichgültig, ob die Aussenwelt in dieser oder in jener Form anerkannt wird, wofern dies nur überhaupt der Fall ist.

Unstreitig kräftigt es unsre Überzeugung von der Existenz eines wahrgenommenen Dinges der Aussenwelt, wenn wir aus ihren Kundgebungen inne werden, dass auch andre Menschen dasselbe ebenso wie wir erblicken. Aus diesem Umstand aber, mit De Morgan[2] p. 28 sq., erst die Anerkennung von der Existenz der Aussendinge ableiten zu wollen, scheint mir ein Umweg zu sein, und glaube ich (ohne damit einen Anspruch auf Neuheit erheben zu wollen) diesem gegenüber vorstehend — sub $\varrho \ldots v$) — den wahren Grund hervorgehoben zu haben.

ω) Empfindungen und Vorstellungen lassen auch durch Erinnerung sich reproduziren, ja wir können die Elemente uns schon geläufiger Vorstellungen auch zu ganz neuen Vorstellungsgebilden erfinderisch verknüpfen.

Wesentlich bleibt jedoch eine jede blos vorgestellte, sei es antizipirend geahnte, sei es in Erinnerung gerufene Empfindung von der durch Sinneseindruck thatsächlich hervorgerufenen verschieden.

Es dürfte schwierig sein, genau festzustellen, in was die faktische Empfindung mit ihrer Erinnerung übereinstimmt und wodurch sie doch von dieser sich unterscheidet, was sie etwa vor ihr voraus hat. Die freien Vorstellungen scheinen mit einem erhöhten Gefühl von Selbstthätigkeit, einem Gefühl von Anstrengung der Einbildungskraft, Phantasie, verknüpft, unter Fehlen des Gefühls, eventuell Genusses, und auch der Anstrengung rezeptiver Sinnesthätigkeit. „Jedenfalls werden wir nicht satt durch die Vorstellung, dass wir ein leckeres Gericht verzehrten, auch leiden wir ungleich weniger durch blos vorgestelltes Zahnweh.“

Stellen wir uns Veilchengeruch z. B. vor, so haben wir doch nicht den Genuss des letztern; wir *haben* die Empfindung selbst nicht. Diese können wir erst durch umgestaltende Einwirkung auf die Aussenwelt erlangen, indem wir uns z. B. wirkliche Veilchen verschaffen.

In diesem unsern Unvermögen, die uns angenehmen Empfindungen und äussern Sinneswahrnehmungen unmittelbar in unserm Bewusstsein herzustellen, wurzelte, wie schon erwähnt, unsre Erkenntniss der Aussenwelt überhaupt.

α_1) Auf ebendieser Beschränkung unsrer Macht über unsern Bewusstseinsinhalt beruht es nun auch ferner, dass wir in Bezug auf

viele vorgestellte Dinge zunächst nur Absichten fassen, uns Ziele oder *Zwecke* vorsetzen können und diese durch *Mittel* zu erreichen suchen müssen, dass wir sie oft erst auf Umwegen zu verwirklichen, zu realisiren im stande sind.

Alles Erkennen der Aussenwelt konnte schon die Voraussetzung nicht entbehren, dass die von den Dingen auf uns ausgeübten Einwirkungen, dass die Art, wie die Dinge uns „erscheinen“, von einer *Notwendigkeit* geregelt seien (bestimmt durch die Natur der Dinge an sich, die Natur unsres Wahrnehmungsvermögens und durch die Beziehung, gegenseitige Lage, in welche die Dinge und unsre Sinnesorgane zu einander stehen oder von uns gebracht werden). Und ebenso wäre das Verfolgen von Zwecken durch Mittel aussichtslos, sinnlos, ohne die Annahme, dass die aufzuwendenden Mittel notwendige Wirkungen haben, genauer gesagt: spezifische Wirkungen notwendig haben müssen. Es wird sich uns in letztrer Hinsicht nur darum handeln, diese Wirkungen richtig vorauszusehen, die Gesetze dieser Wirkungen zu erkennen.

Gesetze in dem Sinne von „Naturgesetzen“ pflegt man dahin zu formuliren, dass unter gleichen Bedingungen auch jedesmal gleiche Folgen ausnahmslos eintreten. Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen. Statt „gleiche“ wäre beidemal wol genauer zu sagen: „ähnliche, d. i. solche, die einander in einer bestimmten Hinsicht gleichen“. Versucht man aber genauer festzustellen, worin das Einandergleichsein von sei es Ursachen, sei es Wirkungen, in der betreffenden Hinsicht besteht, so zeigt sich, dass dasselbe zurückzuführen ist auf die Übereinstimmung zwischen Eindrücken, Empfindungen, die sie unter bestimmten Umständen in unserm Geist hervorrufen, zurückkommt auf die Gleichheit ihrer *Erscheinung* für unser Erkenntnissvermögen, die als solche unmittelbar empfunden und von der Nichtübereinstimmung unterschieden wird. Dieser Rückschluss aber von unsern Empfindungen auf die Dinge, die sie hervorrufen, beruht wieder wesentlich auf der Annahme, dass jene von diesen mit *Notwendigkeit* abhäng ihnen in *gegebener* Weise mit unabänderlicher Prädestination entsprechen. Notwendigkeit also erscheint als der ursprünglichere und höhere Begriff, ohne welchen auch derjenige einer Gesetzmässigkeit in der Aussenwelt nicht erklärt zu werden vermöchte.

β_1) Unsre eignen Empfindungen — z. B. Schmerz —, unsre Vorstellungen, Affekte und Willenszustände werden wir unmittelbar inne als dasjenige, was sie *sind;* sie sind gerade das, als was sie in unser Bewusstsein eintreten. Auf die analogen Vorgänge im Bewusstsein andrer Menschen vermögen wir darum auch — mit einiger Wahrscheinlichkeit — zu schliessen.

γ_1) Im Gegensatz aber zu den Erkenntnissobjekten der angeführten Klasse, welche sonach als dasjenige, was sie *„an sich“* sind, von uns

erkannt werden können, ist in Bezug auf die Dinge der übrigen Aussenwelt solches *nicht* der Fall. Vielmehr muss hier zuvörderst eine Grundwahrheit konstatirt werden, welche die „Metaphysik" zutage gefördert und — die einzige fast — im Kreise der Philosophen zu allgemeiner Anerkennung gebracht hat (woneben ihr aber das Verdienst nicht abzusprechen ist, der Oberflächlichkeit wirksam entgegengetreten zu sein, viele Irrtümer, Illusionen als solche aufgedeckt und zerstört zu haben, überhaupt auf Läuterung und Präzisirung der Begriffe, mannigfach zu weiteren Fortschritten in dieser Richtung anregend und zur Gründlichkeit und Behutsamkeit im Forschen erziehend, hingearbeitet zu haben). Es ist die Wahrheit, dass wir, was die Dinge der Aussenwelt *an sich* sind, zunächst überhaupt nicht zu erkennen vermögen.

Längst hat die Physik den Schall, das Licht, die Wärme etc. auf etwas ganz anderes zurückgeführt, als das ist, als was sie uns *erscheinen:* auf Bewegungsvorgänge, Schwingungszustände materieller Teilchen, welche wir bei tönenden oder den Ton leitenden Körpern sogar dem Auge sichtbar machen können. So ist eine grüne Wiese z. B. durchaus nicht „grün an sich", d. h. ihr haftet nichts an von unsrer Empfindung der grünen Farbe, sondern wir wissen oder glauben mit gutem Grunde es zu wissen, dass diese Wiese nur die Eigenschaft hat, von den auf sie fallenden transversalen Lichtwellen diejenigen von einer bestimmten Wellenlänge diffus zurückzuwerfen, die andern zu verschlucken, sie in Wärme oder auch chemische Arbeit des Blattgrüns (Chlorophylls) umsetzend. Herr Emil du Bois-Reymond hat schon darauf aufmerksam gemacht, dass der schöne Ausspruch „Und es ward Licht" auf Erden strenge genommen erst zur Wahrheit wurde, als sich die ersten Augenpunkte bei den frühesten Lebewesen (Infusorien) ausbildeten. Ebenso ist die uns umgebende Welt eigentlich stumm, und die Schall- und Tonempfindungen entstehen erst, wenn durch die in das innere Ohr eindringenden longitudinalen oder Verdünnungs- und Verdichtungswellen der Luft von den je 15 500 Corti'schen Stäbchen, welche in der das Labyrinth auskleidenden weichen Nervenmasse stecken, einzelne Gruppen erschüttert, in Mitschwingung versetzt werden, u. s. w.

Wir vermögen — bildlich gesprochen — die Farbe der Brille, durch die wir die Welt betrachten, von dem Erscheinungsbild der Welt überhaupt nicht zu trennen, nicht dieses von jener frei zu machen, zu sondern. Denn jene Brille, als das dem Geiste mit den Sinnesorganen aufgesetze Wahrnehmungsvermögen, können wir eben (ohne Selbstvernichtung) nicht abnehmen, und nirgends ist der Geist im stande die Aussendinge selbst zu erfassen. Oder, um mit neueren Philosophen den Sachverhalt noch etwas schärfer zu präzisiren:

Von der Natur der Dinge an sich — a —, zufolge deren sie auf uns einwirken, und einem subjektiven Moment x, welches durch unsre Sinnesorgane sowol als durch die spezifische Natur, eventuell Beschränkung, unsres geistigen Auffassungsvermögens dieser Einwirkung hinzugefügt, vielleicht auch aus ihr weggenommen, gelöscht wird, unter allen Umständen aber sich ihr unvermeidlich beimischt, ist die Art A bestimmt, wie die Dinge uns erscheinen, wie wir sie uns kraft einer Naturnotwendigkeit vorstellen müssen; es ist, im mathematischen Sinne des Wortes, A eine *Funktion* von diesem x und a:

$$A = f(x, a).$$

Da wir ausser stande sind, jenes x zu ermitteln, so können wir aus dem A, dessen wir unmittelbar inne werden, nicht mit irgendwelcher Sicherheit oder auch nur Wahrscheinlichkeit auf das a schliessen (und könnten es selbst dann nicht, wenn uns das Gesetz der Zuordnung, oder die Natur der Funktion f schon bekannt wäre), d. h. was die Dinge an sich sind, bleibt uns unbekannt.*)

Anstatt von solchen *„Dingen"*, müssten wir eigentlich — vorsichtiger — nur von dem (unbekannten) „ihrer Erscheinung zugrunde liegenden Wirklichen" reden. Auf dem Standpunkt des unbefangenen Bewusstseins nämlich (im Gegensatz zum Standpunkt des wissenschaftlichen Bewusstseins vergl. Harms[1]) identifizirt der Mensch allerdings die Dinge ohne weiteres mit seinen Vorstellungen von denselben.

Nachdem aber in Bezug auf ganze Reihen von Naturerscheinungen die fortschreitende Wissenschaft diese Einerleisetzung, Identifizirung schon als unhaltbar hat erkennen lassen, sie mit dem Streben nach einheitlicher Erkenntniss des Weltganzen unvereinbar zeigte, ist die Philosophie vollkommen im Rechte, wenn sie bei *allen* Erscheinungsformen der Natur und Aussenwelt solche Identität von vornherein wenigstens in Zweifel zieht.

So müssen wir nun auch den *„Raum* an sich" als das der Erscheinungsform des Raumes zugrunde liegende Wirkliche von dieser Erscheinung desselben, d. i. dem vorgestellten Raume, unterscheiden und ebenso die Erscheinungsform der *Zeit* auseinander halten mit dem ihr zugrunde liegenden Wirklichen.

δ_1) Die Frage nach der „Ähnlichkeit" eines „Dings an sich" und unsrer Vorstellung von demselben ist wol (vergl. v. Helmholtz[1]) sinnlos. Die beiden mögen unvergleichbar sein, wie etwa eine Symphonie und ein Gemälde. Wesentlich ist die Gesetzmässigkeit, mit der sie sich gegenseitig entsprechen — ein Entsprechen, welches nie weiter zu gehen braucht, als etwa das Entsprechen, die gegenseitig eindeutige Zuordnung des „Zeichens" mit dem „Bezeichneten", des „Dinges" und seines „Namens" (von der weiter unten noch eingehender die Rede sein wird) und bei der von einer Ähnlichkeit zwischen beiden auch

*) Ich möchte gleichwol nicht mit Herrn E. du Bois-Reymond auch allen zukünftigen Fortschritten der Erkenntniss hier schon mit einem „Ignorabimus" vorgreifen.

keine Rede sein kann. Wesentlich insbesondere ist die Wechselwirkung, in die beide unter Umständen treten, nämlich vor allem die unter gewissen Voraussetzungen eintretende Einwirkung des Dinges auf unsre Empfindung und Vorstellung von demselben, wie sie unabhängig von unserm Willen durch eine Naturnotwendigkeit gegeben erscheint, sodann eventuell die Einwirkung unsrer Handlungen auf das Ding, oder vielmehr wiederum deren dadurch hervorgerufene Rückwirkung auf uns selber.

Die Eindeutigkeit solchen Entsprechens kann übrigens schon in Zweifel gezogen werden; ihr Ausdruck ist eventuell zu modifiziren — in Anbetracht der Möglichkeit, dass gleichwie ein geschliffener Krystall mit seinen verschiedenen Facetten das Bild eines leuchtenden Punktes als ein mehrfaches zurückwirft, auch unser Geist in der Lage sein könnte (falls ein Sinnesorgan dem „Facettenauge" vergleichbar), ein Ding an sich stets nur als eine Mehrheit von Dingen wahrzunehmen. Auch umgekehrt ist denkbar, dass wir Dinge *a*, *b* und *c* isolirt nicht zu erkennen vermögen, dass uns wohl aber *a*, wenn in Verbindung mit *b*, als ein Ding und ebenso *a* mit *c* als ein ander Ding in die Erscheinung tritt, ohne dass wir doch von dem gemeinsamen Element *a* der beiden eine Ahnung bekommen, und anderes mehr.

ε_1) Aus diesem gesetzmässigen Entsprechen, der erwähnten naturnotwendigen Wechselwirkung zwischen Ding und Vorstellung schöpfen wir nun die Berechtigung, doch in einem gewissen Sinne *von den Dingen selbst zu reden*, und nicht blos von unsern Vorstellungen über dieselben, trotzdem jene „an sich" sich unsrer Erkenntniss beharrlich verschliessen, und nur diese in unser Bewusstsein einzutreten vermögen.

Unstreitig wollen und beanspruchen wir, solches zu thun. Wenn wir z. B. sagen (vergl. Mill[1]): „Die Sonne (genauer: der Stand der Sonne über dem Horizont) ist die Ursache des Tages", so soll damit nicht etwa blos ausgedrückt werden, dass die Vorstellung (oder „Idee") von der Sonne die Ursache (oder Idee von der Ursache?) sei von unsrer Vorstellung des Tages; es soll nicht blos eine Beschreibung des subjektiven Zustands unsrer Vorstellungen damit gegeben werden, der als solcher ja ebenso gut in unsrer Laune oder Willkür blos begründet sein könnte — sondern es soll mit solchem Ausspruch darauf hingewiesen sein, dass in dem den erwähnten Erscheinungen (der Sonne und des Tages) zugrunde liegenden (unbekannten) Wirklichen etwas liegt, was kraft naturgesetzlicher Notwendigkeit uns zwingt, einen ursächlichen Zusammenhang zwischen beiden anzunehmen.

Im Hinblick, unter steter und als selbstverständlich geltender Bezugnahme auf jenen Zwang des Entsprechens und unter dem (allerdings nur zu oft ausser Acht gelassenen) *„metaphysischen Vorbehalt"*

(dass wir die Dinge „an sich" *nicht* zu erkennen vermögen), können wir darum in der That von den Dingen der Aussenwelt selber (auch im Gegensatz zu unsern Vorstellungen) reden; in diesem Sinne und unter diesem Vorbehalte geschieht dies auch allgemein in den empirischen Wissenschaften und geschieht es von rechtswegen.

So hat nun z. B. die Frage, ob auf den von uns ewig abgewandten drei Siebenteln der Mondoberfläche, ob auf der „Rückseite" des Mondes sich Wasser befinde, einen ganz bestimmten Sinn, wenn wir auch nicht wissen können, was der Mond, was Wasser, was Materie überhaupt „an sich" ist, was der Erscheinung einer Oberfläche Wirkliches zugrunde liegt u. s. w. Dies wird wol jedermann ohne weiteres zugeben.

Ebenso ist aber auch — um ein neuerdings vielumstrittenes Beispiel anzuführen — die Frage eine vollberechtigte, ob der *physikalische Raum* wirklich ein „Euklidischer", eine „ebene" und sonach unendliche dreidimensionale Mannigfaltigkeit sei, oder ob er etwa als ein durchweg endlicher, nach allen Seiten mittelst vierdimensionaler Krümmung in sich zurückkehre. Auch bei dieser Frage handelt es sich nicht um die subjektive Beschaffenheit unsrer herkömmlichen, gewohnten Anschauung, welche zur Zeit noch unbestritten die des ersteren Raumes ist, sondern darum, ob nicht eine objektive Notwendigkeit vorliegt (oder wenigstens nach dem heutigen Stand unsrer Erkenntniss schon vorliegen *kann* und dereinst vielleicht sich aufdrängen wird) dieselbe zu modifiziren, der Wahrheit zuliebe sie umzubilden, nämlich sie durch die letztere Raumvorstellung zu ersetzen.

Ganz richtig hat auch Lotze hierin den Kernpunkt der Frage erblickt. Im übrigen scheint er mir aber in seiner gegen die Untersuchungen von Riemann und v. Helmholtz gerichteten Polemik (Metaphysik, p. 249 . . 267) (unter andern) in einen analogen Fehler zu verfallen, wie ihn (nach Whewell's **Geschichte der induktiven** Wissenschaften) der Kirchenvater Lactantius*) beging, der gegen die Möglichkeit von Gegenfüsslern auf unsrer Erde eiferte, weil er die ihm geläufige Richtung der Schwere absolut festhielt, und folgerichtig zu dem Schlusse kam, dass solche Antipoden auf dem Kopfe stehen müssten. Ganz ähnlich in der That überträgt auch Lotze in seinem Hauptargumente die ihm geläufige Vorstellung (und Annahme der Existenz) von unendlichen Geraden, dieselbe allzu fest haltend, ohne weiteres auf Wesen (jene fingirten mit ihrer ganzen Existenz an die Kugelfläche gebannten „Flächenwesen"), die sie nach den für ihr Dasein gemachten Annahmen gar nicht zu haben brauchten, ja überhaupt nicht haben könnten (p. 252), und spricht darum mit Recht von „Widersprüchen", in welche solche Wesen durch das Studium ihres Raumes verwickelt werden müssten.

So sehr ich das neuerliche Wiederaufleben der (dermalen nur in einem wissenschaftlicheren Gewand, als früher, auftretenden) Mystik, welches sich an die erwähnte Frage der Raumdimensionen geknüpft hat, missbillige und beklage, halte ich doch die zweiterwähnte Raumanschauung für die richtige. Ich bin überzeugt — doch würde es mich hier zu weit führen, meine

*) Vor ihm, schon im Altertum, auch Tertullian — vergl. Ueberweg[1] p. 370.

Gründe darzulegen —, dass nicht nur jene neueren Untersuchungen der Mathematiker über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten logisch und erkenntnisstheoretisch vollberechtigte sind, sondern dass auch wirklich unsre raumerfüllende Welt eine durchaus „endliche" ist — natürlich „unbegrenzt" — jedoch nach jeder Richtung *unsres* Raumes in sich selbst zurückkehrend, wobei sich die successiven Phasen der jeweils augenblicklichen dreidimensionalen Gegenwart zu einem vierdimensionalen Gebilde der Wirklichkeit schichtweise übereinanderlegen. Zu dieser Anschauung bin ich — nebenbei gesagt schon vor der durch Zöllner eröffneten Aera der Kontroversen — angeregt durch die Lektüre des betreffenden von „Dr. Mises" (Theodor Fechner's) „Vier Paradoxa" — gelangt. Wer Recht hat, das wird — qui vivra, verra — eine fernliegende Zukunft entscheiden. Jedenfalls kann es nicht als Argument gegen die Richtigkeit einer Ansicht aufgeführt werden, wenn Verfechter derselben zu weit gegangen sind, wenn Einzelne zugunsten derselben auch vielleicht sich kompromittirt haben sollten, und für welche Ansicht man auch immer Partei nehmen möge, wird man doch Bernhard Riemann's (auf der Schluss-Seite seiner Arbeit „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" ausgesprochenes) Endziel gelten lassen — in welchem wir auch die Rechtfertigung aller metaphysischen Untersuchungen hauptsächlichst erblicken: dass die Forschung nicht „durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird".

Wenn bei dem vorstehenden Exkurse das Wort „wirklich" wiederholt gefallen ist, so war dasselbe bereits unter dem metaphysischen Vorbehalt, also *nicht* als gleichbedeutend mit „an sich", zu nehmen. „Wirklich" nennen wir (zu einer Zeit), was *ist*, im Gegensatz zu dem was nicht ist, und es bedarf letzteres keiner weiteren Erläuterung für diejenigen Dinge, deren wir unmittelbar inne werden. Erläuterungsbedürftig dagegen bleibt das Wort für die Dinge der Aussenwelt, die wir ja nicht selbst mit unserm Geiste erfassen, sondern von denen nur die Vorstellung, und eventuell der Sinneseindruck, in unser Bewusstsein eintritt. Indem wir solch einem gedachten oder vorgestellten Dinge „Wirklichkeit" zuschreiben, bringen wir es zum Ausdruck, dass wir eine objektive Notwendigkeit erkennen, die wir nämlich direkt als über unserm Willen stehend unfrei empfinden — die wir denn als eine objektiv begründete auch für gemeinverbindlich halten — kraft der Natur unsres Vorstellungsvermögens das Ding gerade so und nicht anders zu denken. Das „Ding an sich" nennen wir die (unbekannte) Ursache, die wir solchem Zwange unterzulegen nicht umhin können.

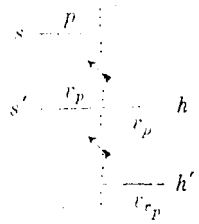
Mit dieser Erklärung wird solchen Dingen, die wir überhaupt nie gedacht haben, die Wirklichkeit nicht abgesprochen.

ξ_1) Durch das Fehlen oder die Bezugnahme auf jenes objektiv notwendige Entsprechen zwischen Ding an sich und Vorstellung werden einige Unterscheidungen bedingt und begreiflich, die sonst unverständlich erscheinen müssten.

Es wird verständlich, wieso die Vorstellung *von* der Vorstellung

eines Dinges verschieden sein kann von der Vorstellung eben dieses Dinges (obgleich wir, wie gesagt, jede Vorstellung als das, was sie „an sich" ist, inne werden und als ebensolches auch beliebig zu reproduziren vermögen), indem bei letzterer jene Bezugnahme eintreten mag, während sie bei ersterer fallen gelassen ist.

Spreche ich von einem *Pferde* (p), so *habe* ich eine *Vorstellung von dem Pferde* (v_p). *Spreche* ich aber von meiner *Vorstellung von dem Pferde*, so *habe* ich eine *Vorstellung von der Vorstellung von dem Pferde* (v_{v_p}). Das beifolgende Schema



versinnlicht in Zeichen unter s, s' das, wovon wir sprechen mögen, und unter h, h' dasjenige, was wir darunter *denken* oder im Geiste „haben". Wäre *jenes* nicht verschieden, nicht zweierlei, so müsste, wenn die Vorstellung von dem Pferde (eine) lebhaft(e) ist, auch das Pferd (ein) lebhaft(es) sein. Müssen wir aber Dasjenige, wovon wir beidemal reden, als zweierlei anerkennen, so scheint es, dass wir auch Dasjenige, was wir uns darunter denken, beidemal nicht als identisch dasselbe gelten lassen dürfen.

Es drängt sich die Frage † auf, ob das nun ohne Ende so weiter geht, ob wir also die Vorstellung von der v_{v_p} abermals als ein neues Objekt des Denkens anzuerkennen haben, und so fort? Indessen will ich mich begnügen, hier blos die Frage aufgeworfen zu haben; ununtersucht bleibe, ob dabei nicht Gebilde von einer Art entstehen würden, wie sie etwa im Gegensatz zu „rationalitas" das lateinische Scherzwort „rationabilitudinalitas" anzudeuten und wol zu persifliren bestimmt war.

Es wird ebenso begreiflich, wie wir unsrer Vorstellung vom Raume — gleichwie schon dem Bewusstsein, das sie in sich fasst — das Merkmal der Ausdehnung abzusprechen vermögen, während wir doch dem (sonst mit jener identisch erscheinen würdenden) vorgestellten Raume eine dreifache Ausdehnung zuerkennen — und anderes mehr.

Haben wir nach den Errungenschaften der Physiologie als das Organ unsres Bewusstseins den cerebralen Teil unsres Leibes anzusehen, so erscheint es (unter anderm) immerhin rätselhaft, wie in diesem, dem Hirne, welches ja ganz im Kopfe Platz hat, die Vorstellung ausgebildet wird von einem Raume, der noch weit über diesen hinaus bis zu den Sternen (und noch weiter) reicht. Lehrreiche und anregende Betrachtungen über diese und noch manche andere Frage über Raum, Zeit, Bewegung und Verursachung finde ich in anziehender Darstellung durchgeführt in dem Werke Herrn Otto Liebmann's[1], welches nunmehr in zweiter Auflage vorliegt.

† Sehe S. 719.

η_1) Fassen wir (mit Mill) die Ergebnisse unsrer Betrachtungen zusammen, so kommen wir zu dem Schlusse, in welchem die besten Denker jetzt übereinstimmen:

Wie wir von der Welt überhaupt nichts inne werden, als die Reihenfolge der Zustände unsres Bewusstseins, als da sind: Empfindungen (Sensationen), Gemütsbewegungen (Emotionen) und Willensregungen (Wollen), schliesslich Gedanken*)-„Zustände", natürlich, die durch den Wechsel in ihrer Succession auch „Vorgänge" zusammensetzen, wofern sie nicht schon selbst als solche aufzufassen — so machen die Empfindungen und die Ordnung ihres Eintretens auch alles aus, was wir von der materiellen Aussenwelt erfahren, und absolut sicher wissen können, und während die „Substanz" materieller *Körper* die unbekannte Ursache unsrer Empfindungen ist, erscheint die „Substanz" *Geist* als der („an sich" ebenfalls unbekannte**) Empfänger oder Rezipient derselben.

Von den erwähnten Dingen sind es vorzugsweise die Gedanken, welche uns noch weiter zu beschäftigen haben werden.

Dass nun die Dinge der Aussenwelt nicht „an sich" erkennbar sind, ist für uns in jeder praktischen Hinsicht glücklicherweise ganz ohne Belang. „Was die Dinge an sich sein mögen, weiss ich nicht und brauche es auch nicht zu wissen, weil mir doch niemals ein Ding anders als in der Erscheinung vorkommen kann" (Kant, Kritik der reinen Vernunft. Ausgabe 1791, p. 332).

Die Art, wie diese Welt uns notwendig erscheint, wie die Dinge auf uns einwirken, beziehungsweise zurückwirken, das ist und bleibt für uns die Hauptsache. Es kommt dem Landmann darauf an, dass der von ihm bebaute Acker Früchte trägt, welche sich uns wohl-

*) Mill[2] will diese (vier) Arten von Bewusstseinszuständen mit *einem* Wort als *„Gefühle"* (im weitern Sinne) bezeichnet wissen und macht darauf aufmerksam, dass, was man „Wahrnehmung" nennt, nichts ist, als ein (an die Empfindung des Sinneseindruckes geknüpfter) Glaube, also eine Art Gedanke, und dass „Handlungen" nichts sind, als Willensthätigkeiten, auf welche eine Wirkung folgt (p. 90 der Schiel'schen Übersetzung). Ich frage noch: wohin gehört die freie Vorstellung?

**) So nach Mill. Ich will es unerörtert lassen, ob und in welchem Sinne diese Qualifikation zutrifft. Ferner will ich hier nicht eintreten in die subtile Frage, unter welchem Gesichtspunkt etwa gerade *Materie* und *Geist* die übereinstimmende Bezeichnung als „Substanz" verdienen möchten. Die Physik hat der *Materie* bis jetzt erst *eine* Art von Substanz gegenübergestellt, als welche die Arbeitsvorräte der Natur, die freie und die gebundene („kinetische" und „potenzielle") *Energie* zu bezeichnen.

schmeckend und nahrhaft erweisen, ganz einerlei, was diese an sich sind oder das denselben zugrunde liegende Wirkliche.

ϑ_1) Um unsre Zwecke zu erreichen, unsre Ziele zu verwirklichen, dazu bedürfen wir der Mitwirkung unsrer Nebenmenschen; wir können deren Kooperation meist nicht entbehren. Um aber solche zu erlangen, müssen wir uns mit ihnen *verständigen*.

Auf die mannigfachen andern Momente, aus welchen das Mitteilungsbedürfniss sich noch zusammensetzen mag und mit denen es im menschlichen Gemüte begründet erscheint, will ich hier nicht eingehen. Es ist ausreichend, den einen praktischen Gesichtspunkt hier hervorgehoben zu haben, welcher schon für sich allein mit Macht zu einer Verständigung unter den Menschen drängt.

Auch bei Tieren sehen wir nicht selten ein planmässiges Zusammenwirken und eine gewisse Arbeitsteilung, vor allem bei den staatenbildenden, wie Ameisen, Bienen, u. s. w. — es genügt schon, an die Bauten, den Ackerbau, die Viehzucht, Kriegführung und Sklavenhaltung bei den erstern zu erinnern. Auf welche Weise, wol unter dem Einfluss des Nachahmungstriebes, derjenige Grad der Verständigung zwischen den Individuen des Stammes, der zu solchen Werken erforderlich ist, doch ohne ein Surrogat der Sprache, zustande kommt, ist nicht ganz aufgeklärt.

Das wirksamste und ausgiebigste, das Mittel zur Erzielung der weitestgehenden und weitreichendsten Verständigung unter den Menschen ist jedenfalls die *Sprache*.

ι_1) In ihr bringt das denkende Subjekt zu dem Ding an sich und zu seiner Vorstellung von demselben noch ein drittes hinzu: den *Namen* oder das *Zeichen* des Dinges.

Um mit dem Seitenblick auf die Metaphysik, zu welchem wir uns oben veranlasst gesehen, thunlichst zum Abschluss zu kommen, sei hier sogleich darauf aufmerksam gemacht, dass — woferne nur die Fälle von etwaiger Sinnestäuschung ausgeschlossen werden — das *Zeichen* ebenfalls zu der Klasse von Dingen zu zählen ist, von welchen wir sagen dürfen, dass wir sie „an sich" erkennen.

Was freilich den Kohlenstoffteilchen, die den gedruckten Buchstaben *a* zusammensetzen, mit ihrer vorwiegenden linearen und Flächenausdehnung Wirkliches zugrunde liegt, wissen wir nicht; es kann uns dies aber auch vollkommen gleichgültig sein. Das Zeichen kommt eben für uns lediglich als dasjenige in Betracht, als was es uns *erscheint;* nur seine notwendige Wirkung auf uns, seine für alle, die es wahrzunehmen vermögen, gleichmässig charakteristische Erscheinung bestimmt und regelt seine Verwendung. Und diese *Erscheinung* des Zeichens, kraft welcher wir den Buchstaben *a* in beliebiger Wiederholung immer als den gleichen erkennen und von allen andern Buchstaben unterscheiden, bildet für uns das *Wesen* desselben.

B. Vorbetrachtungen über Zeichen und Namen.

α) Ich glaube, die elementarste aller deduktiven Disziplinen nicht einleiten zu dürfen, ohne zuvörderst auf die enorme Wichtigkeit des Zeichens, das ja an sich als ein unbedeutendes Ding erscheint, gebührend hinzuweisen, und schliesse ich mich dabei grösstenteils — in freier Weise —, an die Ausführungen Trendelenburg's (Bd. III, p. 1 . . 4) an.

Erst mit dem Eintritt der „bezeichnenden" oder „symbolisirenden" Thätigkeit (zu welcher aus der bildenden Thätigkeit auch noch die abbildende gerechnet werden mag) scheint in der That das Menschengeschlecht sich aus dem absoluten Nullpunkte der Civilisation und über das Niveau des Tieres erhoben zu haben, und kaum einer wirklichen Sache dürfte der Menschengeist soviel Fortschritte zu verdanken haben, als wie dem *Zeichen* der Sachen.

Das Zeichen, welches in der Geberde und im Ton zum Affekt, zur Lebensstimmung spricht, spricht in Wort und Satz zum Intellekt und hat nach den Gesetzen der Ideenassoziation die Kraft, in dem, der es vernimmt oder anwendet, bestimmte Vorstellungen zu erzeugen und in ihrer Abfolge zu richten.

Indem es mit der Vorstellung zusammenwächst, verschmilzt, wirkt es selber auch auf das Denken zurück. Durch das Zeichen werden die sonst in einander fliessenden, zuletzt zerfliessenden, Vorstellungen gesondert und als getrennte Elemente ein bleibender Besitz, über welchen der Denkende fortan verfügen kann. Mittelst des Zeichens wird unterschieden, das Unterschiedene fixirt und das Fixirte zu neuen und eigentümlichen Verbindungen tauglich gemacht: das Zeichen wird uns zur Handhabe, an welcher wir die Gedankendinge packen. Erst durch das Zeichen löst die Vorstellung von dem sinnlichen Eindrucke, an welchem sie sonst haftet, sich los, und vermag nun in das Allgemeine sich zu erheben. So wird das Denken durch das Zeichen des Worts nach der einen Seite frei, auf der andern bestimmt.

Ferner gibt es nur durch das Zeichen, durch welches in Vielen derselbe Gedanke, derselbe Zweck — *ein* Wille und *eine* Seele — möglich wird, jene Gemeinschaft der menschlichen Kräfte, auf welcher das Leben der Menschen als ein Leben der Individuen im ganzen Geschlecht, auf welcher Gesittung und Bildung beruht.

Diese Wirkung schon des ausgesprochenen Zeichens steigert sich noch ausserordentlich in der *Schrift*.

Das hörbare Zeichen, flüchtig wie der Augenblick*), wird durch die Schrift sichtbar und bleibend, den Verkehr der Vorstellungen zwischen räumlich Entfernten anknüpfend, selbst den — allerdings nur einseitigen — Verkehr der Gegenwart mit längst vergangenen und mit den zukünftigen Geschlechtern vermittelnd.

Sofern das Leben des Menschen ein historisches Leben ist, ein Leben in einer überkommenen durch die Geschichte gebildeten geistigen Substanz, so ist die Schrift das Organ dieses sich fortsetzenden und erweiternden Lebens und Wirkens. Der geschichtliche Geist der Menschheit gestaltet und mehrt sich in der Schrift.

Darum fühlten die Menschen auch seit der ersten Erfindung die Wichtigkeit der Schrift für menschliches Leben. Gesetze, schon seit Jahrhunderten, verpönen ihre Fälschung.

Von den ältesten schriftlichen Urkunden aber, in welchen Glaube und Willensmeinung unter ihren Zeitgenossen hervorragender Persönlichkeiten sich einst verewigte und die als etwas Ausserordentliches dem kindlichen Geist einer früheren Kulturepoche begreiflich imponirten, sehen wir auch manche bis auf den heutigen Tag noch in übermässigem autoritativen Ansehen sich erhalten.

Seit bald einem halben Jahrtausend steigert die Schrift im *Druck* ihre Fähigkeit verbreiteter Mitteilung und an der Aufgabe, die Zeichen der Schrift in kürzester Zeit und grösster Vervielfältigung auf kleinem Raume so herzustellen, dass sie dem Auge sichtbar bleiben, wird immer noch fortgearbeitet. Endlich dürfen wir es rühmen, dass das Menschen verbindende Zeichen schon als ein unsichtbarer Blitz von Land zu Land, von Weltteil zu Weltteil fliegt, den ganzen Erdball mit seiner Herrschaft umspannend.

So hat das Zeichen in Sprache und Schrift schon für den Menschen überhaupt eine Bedeutung, wie gar nichts anderes. In Hinsicht seines Nutzens für die Gesellschaft erstanden allerdings ihm s. . . Rivalen oder Konkurrenten, wie Steinkohle und Eisen, wie die Dampfmaschine. Je mehr wir aber von dem Leben überhaupt den Gebieten geistiger Thätigkeit uns zuwenden, eine um so hervorragendere Rolle sehen wir dem Zeichen zufallen, und die bedeutendste in den Wissenschaften, vornehmlich den exakten. Erfindungen, auch Entdeckungen, . . sachlichen Errungenschaften, welche sich der Menschengeist erwirbt, stehen fast ohne Ausnahme auf der Voraussetzung des verständlichen und konsequent gehandhabten Zeichens, welches gleicherweise den einsamen Umgang des Gedankens mit sich selbst und den Gedankenverkehr in der Menschheit bedingt.

*) Nach dieser Seite scheint indess Edison's Erfindung des Phonographen schon eine neue Aera zu inauguriren.

λ_1) Es haben diese Wissenschaften, mehr oder minder ausgesprochen, die Tendenz, die Schwierigkeiten des Studiums der *Dinge* — der Dinge, die man nicht immer bequem zur Hand hat, die man meist nicht festhalten oder fixiren und ohne weiteres manipuliren kann — möglichst *abzuwälzen* auf das Studium ihrer *Zeichen*, welche letzteren dem Forscher stets zur Verfügung stehen und mit unvergleichlicher Leichtigkeit zu hantiren sind.

Die Erleichterung und Vorteile, welche ein judiziöser Gebrauch der Zeichen in dieser Hinsicht der Forschung zu gewähren vermag, würden sich passend vergleichen lassen mit denjenigen, welche gegenüber dem direkten Tauschverkehr mit Waaren (in Zentralafrika z. B.) die Einführung von Wertzeichen — des Geldes — gewähren müsste. Freilich würde mit solch' illustrirendem Hinweis an Ort und Stelle nicht viel zu gewinnen sein, indem wir finden, dass Völkerschaften, welche sich noch im Zustande analphabetischer Wildheit befinden, auch mit dem Gebrauch des Geldes oft unbekannt sind.

Der vorstehende Vergleich ist ähnlich schon von Leibniz gemacht und verlohnt es, seinen Gedankengang näher darzulegen (vergl. Trendelenburg l. c. auf spätern Seiten).

Leibniz geht von einer psychologischen Betrachtung über die Bedingungen der Deutlichkeit unsres Denkens aus. Ursprüngliche und einfache Vorstellungen, so wie sie z. B. aus der Wahrnehmung stammen, pflegen auch anschaulich reproduzirt zu werden. Hingegen denken wir die zusammengesetzte Vorstellung gemeiniglich nur durch Zeichen. Namentlich wo behufs Bestimmung und Erkenntniss des Wesens eines Dinges eine längere Zergliederung nötig ist, schauen wir die ganze Natur dieses Dinges nicht an, sondern kürzen sie im Zeichen ab, indem wir darin die Fähigkeit zu haben meinen, die Vorstellung, wenn es sein muss, (vollends) zu entwickeln. So betrachten wir z. B. bei dem Begriff eines Tausendecks nicht wirklich alle tausend Seiten, sondern die Zahl tausend und sich aneinander schliessende Seiten schweben uns dunkel vor, und statt der deutlichen Vorstellung bedienen wir uns des Wortes als eines Zeichens, wie z. B. in der Arithmetik und Algebra allenthalben (Meditationes de cognitione veritatis et ideis, zuerst in den Acta eruditorum. Editio Erdmann, p. 79, 80).

Und ferner sagt Leibniz im Eingang seiner deutschen Schrift: Unvorgreifliche Gedanken betreffend die Ausübung und Verbesserung der deutschen Sprache (Dutens VI, 2, p. 7 sqq. — wahrscheinlich 1697):

„Wir haben Zeichen nötig nicht nur (um) unsre Meinung Andern anzudeuten, sondern auch *unsern Gedanken selbst zu helfen*. Denn gleichwie man in grossen Handelsstädten auch im Spiel und sonsten nicht allezeit Geld zahlet, sondern sich an dessen Statt der Zeddel oder Marken*) bis zur letzten Abrechnung oder Zahlung bedient: also thut auch der Verstand mit den Bildnissen der Dinge, zumal wenn er viel zu denken hat, dass er

*) Wir würden heutzutage sagen: der Buchführung und Wechsel. Der Verf.

nämlich Zeichen dafür brauchet, damit er nicht nötig habe, die Sache jedesmal, so oft sie vorkommt, von neuem zu bedenken. Daher, wenn er sie einmal wohl gefasst, begnügt er sich hernach oft, nicht nur in äusserlichen Reden, sondern auch in Gedanken und innerlichem Selbstgespräch, das Wort an die Stelle der Sache zu setzen. Und gleichwie ein Rechenmeister, der keine Zahl schreiben wollte, deren (In-) Halt er nicht zugleich bedächte und gleichsam an den Fingern abzählete, wie man die Uhrschläge) zählt, nimmer mit der Rechnung fertig werden würde: also, wenn man im Reden und auch selbst in Gedanken kein Wort sprechen (passiren lassen) wollte, ohne sich ein eigentliches Bildniss von dessen Bedeutung zu machen, würde man überaus langsam sprechen, oder vielmehr verstummen müssen, auch den Lauf der Gedanken nothwendig hemmen, also im Reden und Denken nicht weit kommen. Daher braucht man oft die Worte als Ziffern oder als Rechenpfennige, anstatt der Bildnisse und Sachen, bis man stufenweise zum Facit schreitet und beim Vernunftschluss (? Endergebniss der Überlegung) zur Sache selbst gelanget. Woraus erscheinet, wie ein Grosses daran gelegen, dass die Worte als Vorbilde und gleichsam als Wechselzeddel des Verstandes wohl gefasset, wohl unterschieden, zulänglich, häufig, leichtfliessend und angenehm seien."

„Wenn der Geometer", sagt Leibniz in demselben Sinne in einer andern Schrift (Fundamenta calculi ratiocinatoris, Editio Erdmann, p. 92), „sooft er im Beweisen eine Hyperbel oder eine Spirale nennt, immer genötigt wäre, ihre Erklärungen oder Entstehungsweisen oder wieder die Erklärungen der diese bildenden Begriffe sich genau vor Augen zu stellen, so würde er sehr langsam zu neuen Entdeckungen gelangen; wenn der Arithmetiker beim Rechnen die Werte aller Ziffern und die Menge der Einheiten nacheinander dächte, so würde er nie weitläufige Rechnungen zu Ende bringen, und es wäre nicht anders, als wenn er statt der Ziffern soviele Steinchen anwenden wollte; und der Rechtsgelehrte kann nicht immer, sooft er die Aktionen, die Exceptionen oder die Rechtswohlthaten erwähnt, die wesentlichen Erfordernisse dieser Dinge, welche oft weitläufig sind, im Geiste durchlaufen, und hat es auch nicht nötig."

Wie man sieht, berührt hier Leibniz schon den bedeutsamen Unterschied, welcher zwischen *unmittelbaren* (oder „*intuitiven*") und *mittelbaren (symbolischen) Vorstellungen* besteht.

Man kann z. B. die fünfhundert Billionen Schwingungen, welche in einem gelben Lichtstrahl an irgend einer Stelle in der Sekunde vor sich gehen, sich nicht im eigentlichen Sinn des Wortes „*vorstellen*", weil das ganze Leben des Menschen auch beim Alter des Methusalem nicht ausreicht, um auch nur einer einzigen Billion sich mit Gedankenschnelle folgender Vorstellungen, Empfindungen oder Wahrnehmungen als getrennter Dinge inne zu werden — ganz abgesehen von der ihrer Kleinheit wegen auch nicht mehr vorstellbaren Einzelschwingung oder Bewegung eines Teilchens in seiner zum Strahl senkrechten elliptischen oder kreisförmigen Bahn (so wenigstens für den Standpunkt der Fresnel'schen Undulationstheorie, welcher neuerdings aber eine elektrodynamische Theorie des Lichts — von Maxwell, nach den erstaunlichen Entdeckungen von Hertz wol siegreich —

gegenübersteht). Man kann jene gleichwol noch „*denken*“ oder mittelbar sich vorstellen. Analog vermögen wir vier gegenseitig zu einander senkrechte Gerade *ohne Widerspruch* uns zwar zu „denken“, aber nicht *mehr*, als (irgend) drei derselben, auf einmal uns anschaulich „vorzustellen“ — eine, wie zu sehen ist, unerlässliche Unterscheidung, die bei der Kontroverse über die Raumdimensionen vielfach missachtet oder übersehen worden ist. Wir bedauern, bei den uns hier gesteckten Zielen auf diese interessante Frage nicht noch näher eingehen zu können.

μ_1) Je nachdem sie ihr obiges Ideal bereits erreicht haben oder nicht, sind die exakten Wissenschaften aus ihrem ursprünglichen, dem induktiven Stadium in das deduktive übergetreten, oder befinden sich noch in jenem.

Hieraus erhellt, dass die allerwichtigsten Funktionen dem Zeichen in den deduktiven Wissenschaften obliegen müssen, ja dass dasselbe schliesslich in diesen den einzigen Gegenstand der Beachtung bilden wird.

Hier ist denn, dieser Wichtigkeit entsprechend, der „Bezeichnung“ überhaupt und spezieller der Namengebung, Terminologie oder Nomenklatur auch die allergrösste Sorgfalt zu widmen. Es erscheint z. B. ein schwieriges mathematisches Problem oft schon halbwegs gelöst, sobald es gelungen, die zweckmässigste Bezeichnungsweise für die zu untersuchenden Gebilde zu entdecken, in welcher die fundamentalen Eigenschaften derselben am übersichtlichsten und angemessensten Ausdruck finden.

Auch zeigt die pädagogische Erfahrung, dass diejenigen Personen, welchen eine geringe Begabung zu exaktem Denken zuzusprechen ist, allemal eine auffällende Gleichgültigkeit, oft eine sich vornehm dünkende Geringschätzung gegen das Zeichen zur Schau tragen und in dieser Stimmung Unlust verraten, sich in die Disziplin des Zeichens zu fügen.

In der Herrschaft über die Zeichen — zunächst der Wortsprache(n) — in der Fähigkeit zum und Gewöhnung an korrekten Gebrauch der Wörter und ihrer Abwandlungen, Flexionen und an richtigen Satzbau, pflegt man überhaupt ein wesentliches Merkmal der *Bildung* mit Recht zu erblicken.

ν_1) Aus all den angeführten Gründen erscheint es ratsam, auch den Prinzipien der Bezeichnung, wie sie aus der Forderung ihrer Zweckdienlichkeit sich als notwendige ergeben, einige Aufmerksamkeit von vornherein zuzuwenden.

Zunächst müssen wir hier einer Verwechselung von „*Name*“ und „*Wort*“ vorbeugen.

Was ein *Wort* ist, weiss jedermann (und wird dieser Begriff unter andern auch in der Telegraphie nach seinem Umfang scharf abgegrenzt).

Nicht alle Wörter aber sind Namen; vielmehr gibt es Wörter, die zwar dazu dienen, in Verbindung mit andern, Namen zusammenzusetzen, für sich jedoch noch keinen solchen vorstellen (Beispiele nachher).

Auf der andern Seite wird nicht jeder Name durch ein Wort repräsentirt, sondern haben wir zu unterscheiden: *einwörterige* und *vielwörterige* Namen. „Die Hauptstadt des deutschen Reiches“, oder auch „die grösste Stadt, die an der Spree liegt“ ist sogut ein Name als wie „Berlin“; es ist zur Zeit ein mit diesem letztern gleichbedeutender Name.

Zu den aus Wörtern zusammengesetzten Namen kommen in der Wissenschaft noch Buchstaben selbst und solche Namen hinzu, die sich aus Buchstaben oder Ziffern mittelst eigener Verknüpfungszeichen zusammensetzen. Solche Namen bezeichnen wir vorzugsweise als „analytische *Ausdrücke*“ (expressions, terms). Es kann und wird uns oft auch ein solcher Ausdruck, wie $a.(b+c)$, als Name oder Zeichen für ein Ding zeitweilig herhalten — und geben wir uns der Hoffnung hin, dass durch dergleichen blosse Namen sich ein grosser Geist nicht abschrecken lassen werde!

Name (nomen, noun) nennen wir ein Wort, Wortgefüge oder Zeichen, welches nach den seinen Gebrauch regelnden Konventionen — wonicht gemäss längst vorhandener Übung — fähig und dazu bestimmt ist, ein Objekt des Denkens, ein „Ding“ selbst zu bezeichnen. Der Name muss demnach (im Nominativ) als Subjekt eines Satzes stehen können, sobald man (in einem solchen) von dem Dinge reden, etwas darüber aussagen will.

Von den Wörtern stellen deshalb die Hauptwörter (Substantiva) ohne weiteres (im Nominativ) Namen vor, und auch die Eigenschaftswörter (Beiwörter, Adjektiva) und Zeitwörter (Verba) sofern sie in substantivischer Verwendung vorkommen, wie „Weiss“ für Etwas weisses resp. die Empfindung weisser Farbe, oder „Schwimmen“ für die Thätigkeit resp. Kunst des Schwimmens. In der Arithmetik werden auch Zahlwörter (Numeralia) substantivisch als Namen gebraucht. Und selbstverständlich werden endlich Fürwörter (Pronomina), wie „Dieser“ oder „Jener“ zu den Namen gerechnet werden dürfen, sofern sie blos als Stellvertreter eines schon erwähnten (resp. anderweitig bekannten) Namens fungiren, aus Rücksichten des Wohlklangs aber, oder um Umständlichkeiten in der Rede zu vermeiden, kürzehalber, nur dessen Wiederholung zu ersparen bestimmt sind.

ξ_1) Unsre Kultursprachen kennen *zehn* Wortarten, oder wenn wir die ja für die Logik ganz belanglosen Ausrufungswörter (Interjektionen) beiseite lassen, deren neune, von welchen wiederum der Artikel in manchen fehlt, sodass einige dieser Sprachen (wie Lateinisch, Russisch) sich mit acht Arten von Wörtern (nach der Klassifikation der Philologen und Grammatiker) in logischer Hinsicht behelfen.

Die obenerwähnten fünf von diesen Wortarten *können*, wie wir

sahen (auch die vier letztern aber nur bedingungsweise und in bestimmten ihrer Formen, wie Infinitiv des Verbums etc.) als Namen verwendet werden.

Die übrigen, als da sind die Umstandswörter (Adverbia), die Präpositionen und die Bindewörter (Konjunktionen) sind dessen unfähig. Solche Wörter, wie „leider", „zu", „entweder" sind keine Namen, und dasselbe gilt auch von den Flexionsformen des Substantivs, wie z. B. der Genitiv „Arthurs" etc. (vergl. Mill). Die Logiker der Aristotelischen Schule („Scholastiker") bezeichneten sie als *„synkategorematische"* Ausdrücke, weil sie erst „zusammen" mit andern ein Ding bezeichnen können (etwas „aussagen") — im Gegensatz zu den Namen oder *„kategorematischen"* Ausdrücken.

Diese Wörter können auch in der That nicht als Subjekt eines Satzes stehen; man kann nicht sagen: „Arthurs war in dem Zimmer" oder: „Leider ist zu beklagen". Man kann freilich sagen: „Leider ist ein deutsches Adverbium". In diesem Falle aber steht „Leider" für: „Das Wort: leider" — analog wie, wenn wir sagen: „Pferd ist ein Hauptwort", das Subjekt auch nur als ein Wort in Betracht fällt und nicht in Hinsicht auf dasjenige, was es bedeutet. Man könnte solche Verwendung passend als die *„suppositio nominalis"* bezeichnen im Gegensatz zu der *„suppositio materialis, sive realis"* (dies zwar zugunsten der Zweckmässigkeit abweichend vom scholastischen Gebrauche). Wer solchen Unterschied nicht anerkennen wollte, der müsste auch zugeben, dass ein gewisses Hauptwort vier Hufe hat und zwei Ohren! Im Deutschen ist dem Mis-verständniss allerdings einigermassen vorgebeugt durch den Wegfall des Artikels bei „Das Pferd" oder „Ein Pferd", dessen Beibehaltung die erstere oder nominelle Auffassung unmöglich machen würde*) — nicht so allerdings in den des Artikels entbehrenden Sprachen. Es erscheint darum *hier* beinahe als Luxus, zu statuiren, dass wir die Auffassung des Subjektes als eines blossen Namens, Wortes oder Wortgefüges späterhin stets ausgeschlossen wissen wollen.

o_1) Wie ein Zeichen als solches beschaffen ist, auf welche Weise es eventuell aus einfacheren Zeichen aufgebaut, zusammengesetzt wird, dies ist (zwar) keineswegs ganz gleichgültig:

Es müssen Zeichen, die für häufigen Gebrauch bestimmt, solchem ausgesetzt sind, vor allem angemessen *kurze* sein; es muss Weitläufigkeit, Komplikation derselben thunlichst vermieden werden. Andernfalls würde ja ihre Anwendung allemal einen ärgerlichen Aufenthalt verursachen, und vergegenwärtigt man sich leicht, wie wenig weit wir mit unserm Denken, mit unsern Erörterungen, Diskussionen kommen

*) Wofern wir nicht sagten: „Das Pferd" ist ein mit dem bestimmten Artikel verbundenes Hauptwort der deutschen Sprache. Hierbei weisen nur noch die Anführungszeichen auf die suppositio nominalis hin.

würden, wären wir z. B. genötigt, den Namen jedes Vorzustellenden immer erst in Stein zu meisseln!

Der unter λ_1) erwähnten psychologischen Unterstützung, welche das Denken aus dem Zeichen schöpft, würde es ohne diese Anforderung grösstenteils verlustig gehen.

Von den Zeichen, über welche die Sprache verfügt, erfüllen (als die einfachsten) genannte Anforderung am besten die *Buchstaben*. Deren Anzahl ist allerdings eine geringe. Man hat dieselbe in's Unbegrenzte vermehrt, indem man sie einerseits mit *„Accenten"* wie in a', a'', . . . andrerseits mit angehängten Ziffern oder Zahlzeichen in Form von *„Suffixen"*, *„Stellenzeigern"* oder *„Indices"* versah, wie a_1, a_2, a_3 etc.

Ungeachtet dieser Vermehrung des Vorrates an leidlich einfachen Zeichen hat man aber vorgezogen, denselben keine ein für allemal feststehende Bedeutung für den menschlichen Verkehr überhaupt beizulegen, sondern sie zu vorübergehenden Bezeichnungszwecken sich verfügbar zu erhalten. Für eigenartige Verwendung in bestimmten Spezialwissenschaften (ich erinnere an die Zeichen für die chemischen Elemente), für diverse Untersuchungsgebiete und Untersuchungen (wie Buchstabenrechnungen) — eventuell zu beliebiger Verwendung — sind die Buchstaben reservirt, also dass diese gleichsam die Rolle spielen oder den Dienst zu versehen haben des „Mädchens für Alles" in dem Haushalte — mit Zeichen.

Zur Unterstützung des Denkens sowol als zur Darstellung und Beschreibung seiner Gesetze werden auch wir in der hier vorliegenden Spezialwissenschaft von dieser Gunst der Situation umfassenden Gebrauch machen und zwar einen viel ernstlicheren, als es in Deutschland bei der einschlägigen Literatur bislang üblich gewesen. Auch nehmen wir gelegentlich das Vorrecht jeder Wissenschaft in Anspruch, sich für die eigenartigen ihrer Betrachtung unterliegenden Objekte noch besondre zu deren Darstellung vorzugsweise geeignete Zeichen zu schaffen.

Im übrigen sind wir aber nicht in der Lage, die Zeichen, deren unser Denken bedarf, vollkommen frei nach unserm Gutdünken — beschränkt lediglich durch objektive Zweckmässigkeitsrücksichten — willkürlich zu wählen, sondern wir finden uns zunächst daran gebunden, aus einem bereits vorhandenen Zeichenvorrat zu schöpfen, indem wir eben angewiesen sind auf den historisch überkommenen Wörterschatz der Sprache.

π_1) Von dem uns schon mit der Sprache gegebenen Zeichenvorrat, mit welchem wir (also) in erster Linie zu rechnen haben, pflegen einwörterige Namen die erwähnte erste der an das Zeichen zu stellenden Anforderungen immerhin schon leidlich gut zu erfüllen.

Das hörbare und sichtbare Zeichen, als welches ein solcher Name erscheint, zeigt sich nun dergestalt mit der Vorstellung verwachsen, dass diese kommt, wenn das Zeichen ruft, sowie auch umgekehrt bei der Vorstellung uns stets der Name einfällt — Vorgänge, bei welchen sogar, wie unter λ_1) auseinandergesetzt, die Vorstellung nicht selten

unvollendet bleibt, und mehr nur im Zeichen als in dieser selbst gedacht wird.

Nur zu einem verschwindend geringen Teile aber besteht ein angebbarer Zusammenhang zwischen diesem Zeichen und dem Bezeichneten, zwischen dem Wortlaut des Namens und dem Inhalt der Vorstellung oder demjenigen, was der Name benennen soll (Trendelenburg l. c.).

Solches ist ja in der That bekanntlich der Fall bei den sogenannten „*Onomatopoetica*", die z. B. mit dem Klange des Namens eine Schallwirkung des zu benennenden Dinges nachahmen, wie die Hauptwörter: Rabe*), Knall, Donner und andere, wie die Zeitwörter: meckern, miauen, zirpen, rollen etc. Auch manche Interjektionen, wie patsch, plumps, knak, könnten hierzu angeführt werden. Bei dem Wort „Blitz" sollte man meinen, dass die Plötzlichkeit und Kürze der betreffenden Lichterscheinung durch die Kürze der Silbe angedeutet werde. Und um z. B. das griechische Wort βδέλλα für Blutegel auszusprechen, müssen die Lippen eine saugende Bewegung andeuten etc. etc.

Der sprachenbildende Geist knüpft überhaupt das Zeichen an eine hervorstechende Seite der Sache an; aber die Anknüpfung an den Inhalt des unter dem Zeichen Begriffenen ist einseitig und zufällig, gestattet keinen hinreichend bestimmten Rückschluss auf den wahren Inhalt, das ganze Wesen desselben. Das andeutende Gepräge des Zeichens schleift sich überdies mit der Zeit ab, und die ursprüngliche Marke ist in ganzen Sprachen verwischt. Die verschiedenen Sprachen bezeichnen in der That dasselbe Ding auch mit den verschiedensten Wörtern.

Der Laut schlägt diejenige Vorstellung in uns an, welche sich *mit blinder Gewöhnung*, aber nicht mit unterscheidendem Bewusstsein, welche sich faktisch, aber nicht *logisch* in *dies* Zeichen und in kein

*) Die meisten wol der hier (zum Teil auch vielfach anderwärts) als solche angeführten Onomatopoetica werden in den Augen eines gründlichen Sprachforschers unechte sein. In seinem berühmten Werke macht Herr Max Müller darauf aufmerksam, wie leicht man sich in dieser Hinsicht täuschen und wie die Mehrzahl der vermeintlich aus Klangnachbildung hervorgegangenen Wörter auf ganz andere Quelle zurückzuführen ist, sodass nur ganz wenige — darunter z. B. das Wort „Kuckuck" — als zweifellos Onomatopoeticon übrig bleiben. Speziell führt er an, dass unser „Donner", „tonerre", „tonitru" etc. von derselben Sanscrtwurzel „*tan*" = strecken, spannen (*dehnen*?) abstammt, die auch im „Ton" der gespannten Saite, sowie in „tendre", lat. „tener" etc. und in „tennis", „dünn" (ursprünglich = flach ausgespannt) zu finden! Und anderes mehr.

Allein wenn auch bei der Zusammensetzung der Wurzeln, aus der ein Wort hervorgegangen, das onomatopoetische Prinzip nachweislich nicht bestimmend gewesen, so könnte es, scheint mir, doch mit von Einfluss gewesen sein bei dem Prozesse der nachherigen Abschleifung (M. Müller's „lautlichem Verfalle" oder der „phonetischen Korruption"), durch die schliesslich das Wort seine gegenwärtige Gestalt erhalten. Jedenfalls empfinden wir, die wir die fertige Sprache sprechen, solche onomatopoetische Anklänge, glauben sie herauszufühlen, ganz unbekümmert um die historische Berechtigung dieser Empfindung.

anderes gekleidet hat (ibidem). Vielmehr ist es allemal eine hauptsächlich von *psychologischen* Momenten beherrschte, von vielen äusseren Zufälligkeiten*) beeinflusste historische Entwickelung, in welcher eben dies Zeichen als Name für das vorgestellte Ding sich herausgebildet hat.

ϱ_1) Diese Wahrnehmung ist schon geeignet, uns die Bemerkung nahe zu legen, wie es wünschenswert sein muss, dass die Namen oder Zeichen als solche auch noch eine zweite Anforderung erfüllen, die wir einstweilen erst in unbestimmten Umrissen dahin charakterisiren können, dass sie (aus einfacheren oder den einfachsten Zeichen) auch *rationell* zusammengesetzt sein sollen.

Vielwörterige Namen, wie sie in Gestalt einer umständlichen Beschreibung hergestellt und dann oft in Definitionen abgekürzt zu werden pflegen, verfügen allerdings diese Anforderung in gewissem Grade zu erfüllen.

Zufolge zahlloser Unvollkommenheiten der Wortsprache, welche sich zwar historisch erklären, doch nimmermehr sachlich rechtfertigen lassen, ist aber zu ihrer Herstellung oft noch ein holles Maass von Geschicklichkeit erforderlich: es ist auf verschiedenen Gebieten noch förmlich eine Kunst, mit Ausschliessung von Missverständnissen unzweifelhaft zu sagen, von was man eigentlich reden wolle, und entspringen aus den erwähnten Unvollkommenheiten Schwierigkeiten, mit welchen Redner und Schriftsteller, Unterricht und Gesetzgebung beständig ringen.

Es erwächst uns das Ziel, auf eine Vervollkommnung des elementaren Bezeichnungssystems für unsre Ideenwelt hinzuarbeiten, auf welches wir noch eingehender und wiederholt die Aufmerksamkeit zu richten haben werden. Mit einigem Erfolg können wir dies aber erst thun, wenn wir in unsern Betrachtungen weiter fortgeschritten sein werden.

σ_1) Ist so in der That die äusserliche Beschaffenheit eines Namens immerhin nicht gleichgültig, so tritt solches Moment doch weit zurück gegenüber einem andern: wir meinen die Konsequenz oder *Disziplin* mit welcher das Zeichen gehandhabt wird. Diese, und nicht die Beschaffenheit seiner äussern Erscheinung, ist bei dem Zeichen die *Hauptsache*.

Als das wesentliche oder fundamentale Erforderniss des Namens und Zeichens haben wir es hinzustellen, dass das Zeichen bei denen, die es brauchen, und denen, die es vernehmen, auch bei jeder Wiederholung (wenigstens innerhalb eines bestimmten Zeitbereiches) die *gleiche* Vorstellung begleite oder erwecke, nämlich diejenige Vorstellung, welche die Wahrnehmung oder Erkenntniss — eventuell die Erfassung, Konzeption, das Innewerden — *desselben* Objektes in ihrem Geiste notwendig erregen müsste (und, von subjektiven Störungen abgesehen, in jedem eintretenden Falle auch wirklich erregt).

*) Vergl. z. B. Herrn Otto Behaghel's anregende und lehrreiche Schrift[1].

Es würde den Zwecken der Bezeichnung zuwiderlaufen und uns um alle Vorteile derselben bringen oder die beabsichtigte Wirkung wenigstens in Frage stellen, wenn bei dem zur Verständigung zwischen Menschen stattfindenden Verkehr der Eine dies der Andere das unter demselben als Name fällenden Zeichen verstünde; der Hörer könnte nicht wissen, was darunter zu denken beabsichtigt ist, wenn der Redende selbst von der einmal dem Zeichen von ihm beigelegten Bedeutung zu andern Malen willkürlich abginge, und endlich auch von der auf Erkenntniss irgend welcher Dinge gerichteten (und natürlich in Zeichen zu führenden) Überlegung des einsamen Forschers wäre nicht abzusehen, wieso dieselbe erfolgreich zu sein vermöchte, wenn dabei der Zusammenhang zwischen den Zeichen und ihrer Bedeutung sich verschöbe, wenn die vorgestellten Dinge ihren Namen sozusagen entschlüpften, wenn nicht, wenigstens zeitweilig und bis zur Erlangung bestimmter als Ruhepunkte zu fixirender Endergebnisse solcher Überlegung, die Bedeutung der meisten Zeichen konsequent beibehalten, „*fest*gehalten" würde.

Darin, dass das unter dem Zeichen Gedachte demselben *eindeutig entspriche*, erblicken wir darum die wesentlichste Anforderung, die an den Gebrauch des Zeichens zu stellen ist. Der Name soll von einer bestimmt feststehenden oder konstanten Bedeutung † sein; er soll als ein „*einsinniger*" oder nomen *univocum* verwendet werden.

Schon bei oberflächlicher Überlegung malen wir uns leicht die Unsicherheit, eventuell Verwirrung, Konfusion aus, die entstehen muss, wenn z. B. in einer Gesellschaft drei Herrn den Namen Müller führen und nun der Herr Müller gerufen oder erwähnt wird. Das Bedürfniss, den Namen durch Hinzufügung weiterer Bestimmungen zu einem eindeutigen gestaltet zu sehen, liess jenen Spassvogel seine Wette gewinnen, dass er auf die einem jeden seiner Bekannten auf der Börse in's Ohr geflüsterte Mitteilung: „Hast du schon gehört, dass der Meier fallirt hat?" allemal zur *gleichen* Antwort die Gegenfrage erhalten würde: „Welcher Meier?"

Wie selten auch zur Zeit noch die im Wortschatz der Sprache uns gegebenen Namen diese Anforderung erfüllen, so ist es doch als ein *Ideal* hinzustellen, dem die Sprache, um ihren Zweck der Verständigung ausgiebigst zu erreichen, zustreben muss, und dem sie auch in der That in fortschreitender Entwickelung sich immer mehr zu nähern scheint: gleichwie das *Ding* und die *Vorstellung* von demselben einander eindeutig mit Gesetzmässigkeit entsprechen, so auch das Entsprechen zwischen dem Vorgestellten und seinem *Zeichen* zu einem eindeutigen zu gestalten, also dass auch das Ding und sein Zeichen einander eindeutig zugeordnet erscheinen werden und das letztere in Wahrheit der Stellvertreter oder Repräsentant des erstern genannt werden dürfe.

Gehörte ein Ding der Aussenwelt an, so war die Vorstellung, die wir uns von demselben (soweit es überhaupt für uns erkennbar ist) zu bilden haben, durch eine (wir mögen sagen „naturgesetzliche") Notwendigkeit

† Sehe S. 719.

bestimmt zu denken, und bildete dies, wie wir gesehen haben, eine unerlässliche Voraussetzung der Erkenntnisslehre. Die letztere dürfte sogar der Überzeugung nicht wol entraten können, dass diese Vorstellung nach hinreichend gründlicher Prüfung des Dinges bei allen Intelligenzen in letzter Instanz dieselbe werden *muss*, dass von dem richtig erkannten Dinge die Vorstellung eine (mathematische) Funktion ist, und soferne die Erkenntniss vollständig ist, auch das Ding eine Funktion der Vorstellung — eine Wechselbeziehung, die wir dann als ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen hinzustellen berechtigt waren.

Man kann allerdings ein „Ding an sich" auf verschiedene Sinnesenergieen einwirken lassen und dadurch verschiedene Teilvorstellungen von demselben erhalten; es ist zunächst die aus diesen resultirende Gesamtvorstellung, welche bei der vorstehenden Auseinandersetzung gemeint war, welche letztere dann aber auch für (irgend) eine bestimmte dieser Teilvorstellungen in Anspruch genommen werden kann. Durch die Thatsachen der Farbenblindheit, Taubheit etc. erscheint es wol noch geboten, hierzu das Zugeständniss zu machen, dass in jener Gesamtvorstellung oder in Bezug auf gewisse von den Teilvorstellungen anfänglich ein Ausfall bei mangelhaft organisirten Individuen möglich ist, der jedoch mittelst induktiver Schlüsse indirekt ergänzt zu werden vermag: es kann z. B. auch ein Farbenblinder das Vorhandensein roten Lichtes durch die Wärmewirkung im Spektrum von dem des grünen unterscheiden, und ein Tauber mittelst des Tastgefühls die im Tönen begriffene Saite von der lautlos ruhenden.

τ_1) Für ein Ding, soweit es für uns erkennbar ist, mehrere verschiedene Namen zu haben, ist allerdings mit den Zwecken der Gedankenmitteilung sehr wohl vereinbar und es darf dies nicht als ein eigentlicher Misstand, sondern höchstens als ein Luxus, vielleicht eine Verschwendung, hingestellt werden.

In der That stehen uns für dasselbe Ding zunächst oft verschiedene Namen zugebote, indem es möglich ist, dasselbe von sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus zu beschreiben — welche Beschreibung dann jedesmal als ein Name für das Ding angesehen werden kann, und manche wissenschaftliche Untersuchung dreht sich darum, ob ein auf diese und ein auf jene Weise definirtes, eingeführtes, beschriebenes Ding das nämliche sein muss, oder ein anderes. Sind aber solche Untersuchungen beendet, ist das Ding voll erkannt, so wird es, auch im erstern Falle, doch praktisch erscheinen, fortan nur *eine*, und zwar die als die zweckmässigste erscheinende von allen Benennungen des Dinges als seine „offizielle" Bezeichnung (standard notation) in der Wissenschaft beizubehalten.

Wie es nun überhaupt möglich gemacht werden kann, dass eine Mehrheit von Menschen dasselbe vorgestellte Ding je mit dem gleichen Namen (eindeutig) bezeichne, und zwar nicht nur auf dem Gebiete der

TEXAS TECHNOLOGICAL COLLEGE LIBRARY

materiellen Welt, wo man auf die Dinge hinzuweisen vermag, sie mitunter gleichsam etikettiren könnte, sondern auch aus der geistigen Welt, aus der Welt des Bewusstseins, mit dem ganzen Reichtum von Beziehungen, die es wahrzunehmen vermag, aus der Welt des Gemütslebens und Wollens, der Gefühle, auf dem gesamten intellektuellen Gebiete — wie es m. a. W. erreicht werden kann, dass jene Mehrheit dieselbe Sprache rede — dies ist auf den ersten Blick schon sehr erstaunlich.

Indessen unternehmen wir es nicht, diese interessante Frage zu beantworten, hier auseinanderzusetzen, kraft welcher von der Natur in den Menschen gelegter Triebe und auf welche Weise in dem jugendlichen Verkehr des Individuums mit seinen nächsten Anverwandten, durch die Erziehung und das Leben diese Aufgabe lösbar ist und in weitem Umfange auch gelöst zu werden pflegt.

v_1) Es genügt zu konstatiren, dass aber die Aufgabe, welche nationale Gemeinschaft wir auch in's Auge fassen mögen, doch bei weitem nicht vollkommen gelöst ist. Der Sprachschatz einer jeden von unsern Kultursprachen überliefert vielmehr uns eine Fülle von Namen, welche der oben als wesentlich aufgestellten Anforderung der Einsinnigkeit durchaus nicht genügen, im Gebrauch denn auch durch ihren Doppelsinn zur Quelle von Missverständnissen werden und Unbedachtsamen gegenüber nicht selten zu missbräuchlicher Anwendung sich hergeben.

Ein Name, bezüglich dessen jene Anforderung *nicht* erfüllt ist, heisst ein *„doppelsinniger“* oder *„mehrsinniger“*, nomen *aequivocum* oder *ambiguum*, wofern er nämlich — dies müssen wir eigentlich der vorstehenden Erklärung noch hinzufügen — überhaupt (einen) Sinn hat, wirklich Name *für etwas* ist, m. a. W. falls wir nur den sinnlosen oder *„unsinnigen“* Namen, wie „rundes Quadrat“ (dergleichen die Wissenschaften gelegentlich auch hervorbringen) beiseite lassen.

Für „doppelsinnig“ wird auch häufig „zweideutig“ gesagt, doch könnte dieser Gebrauch selbst zur Quelle von Missverständnissen werden, indem, wie wir nachher sehen werden, auch das Wort „zweideutig“ ein doppelsinniges ist — vergl. λ_2).

Das Wesen der Doppelsinnigkeit ist nicht darin zu erblicken, dass der Name eine Mehrheit von Dingen als seine Bedeutung umfasst (wie einerseits der „Kollektivname“ und andrerseits der „Gemeinname“, von denen weiter unten die Rede sein wird). Vielmehr beruht solche lediglich auf dem *schwankenden Gebrauche*, dem wir den Namen unterwerfen. Die Doppelsinnigkeit ist ein Merkmal der *Anwendungsweise* des Namens.

Sie tritt nämlich erst ein, indem wir (ev. gewohnheitsmässig) Urteile fällen, zu denen wir nur berechtigt sind, einmal im Hinblick auf eine bestimmte von den Bedeutungen des Namens und bei Ausschluss seiner übrigen Bedeutungen, ein andermal ebenso im Hinblick auf eine andere von diesen Bedeutungen bei Ausschluss, vielleicht, der erstern, u. s. w.

Begegnen wir z. B. Urteilen, wie: „Alle Metalle sind chemische Elemente“ und ferner: „Messing ist ein Metall“, so erscheint dadurch der Name Metall zu einem doppelsinnigen gestempelt. Jedes von diesen Urteilen kann für sich als richtig anerkannt werden, wenn nur die Bedeutung des Namens Metall auf eine bestimmte Weise aufgefasst, begrenzt wird. Diese Abgrenzung ist aber beidemal verschieden; sie ist eine andere (und zwar hier blos eine „engere“) bei dem erstern Urteile, wo sie mit der in der chemischen Wissenschaft üblichen zusammenfällt, als bei dem zweiten Urteile, wo sie sich deckt mit der („weiteren“) Auffassung, welche dem Namen Metall in der Technik und im gewöhnlichen Leben zuteil wird.

Wer nun solche Doppelsinnigkeit übersähe, der würde sich schwerlich der Schlussfolgerung erwehren können, dass Messing ein chemisches Element sein müsse — wogegen es bekanntlich doch eine Mischung, Legirung aus Zink und Kupfer ist.

In ähnlicher Weise vollziehen wir, sooft zwei oder mehr Bedeutungen eines Wortes uns unbewusst vermengt werden, fast unvermeidlich logische Fehlschlüsse — eine Bemerkung, zu welcher spätere Betrachtungen uns noch vielfach Belege liefern werden. (Vergl. besonders § 4.)

Um (mit Jevons) dies noch durch ein Beispiel zu illustriren, wo der Doppelsinn etwas weniger augenfällig ist, so könnte jemand argumentiren: „Strafe ist ein Übel“. „Andern (wenn auch in bester Absicht) ein Übel zuzufügen, sollte nicht erlaubt sein, ist unrecht.“ Ergo: „Andern eine Strafe angedeihen zu lassen (zuzufügen), ist unrecht.“ Der Doppelsinn liegt im Worte „Übel“, welches im ersten Satze aufzufassen war als physisches Übel oder Leid, im zweiten dagegen als moralisches Übel. Etc.

Sehr treffend sagt Baco von Verulam: Die Menschen glauben zwar, dass ihr Verstand die Worte beherrsche, aber es kommt auch vor, dass die Worte ihre Gewalt über den Verstand rückwirkend geltend machen („Credunt homines, rationem suam verbis imperare, sed fit etiam, ut verba vim suam super rationem retorqueant“).

φ_1) Es ist darum Jevons beizupflichten, wenn er sagt, dass nichts zur Erlangung korrekter Gewohnheiten des Denkens und Schliessens

mehr in's Gewicht fallen könne, als eine gründliche Bekanntschaft mit den grossen Unvollkommenheiten der Sprache, und dass an praktischem Nutzen kaum ein Teil der Logik denjenigen übertreffen dürfte, der auf die Vielsinnigkeit der Ausdrücke aufmerksam macht. Je mehr man sich in der That in die subtilen Schwankungen (variations) in der Bedeutung ganz geläufiger Worte vertieft, desto mehr wird man die *gefährliche* Natur der Werkzeuge (tools) gewahr, deren wir uns bei allen Mitteilungen und Argumentationen zu bedienen haben.

Wird der Gebildete auf diesen Punkt auch sorgsamer achten als der Ungebildete, so ist doch auch jenem im allgemeinen der Vorwurf nicht zu ersparen, dass selbst da, wo die Sprache zur Vermeidung jeder Doppelsinnigkeit bequeme Ausdrucksmöglichkeiten bietet, er sich diese nicht immer hinlänglich zunutze macht.

Mit Recht hebt z. B. Mill die Doppelsinnigkeit hervor, mit welcher fast allerorten das Pronomen „derselbe (dieselbe, dasselbe)" gebraucht zu werden pflegt — bald im Sinne von „der nämliche" (und dann also auch „gleiche"), bald in dem Sinne von „ein gleicher", aber nicht der nämliche. Es ist im Grunde (im erstern Sinne) nicht derselbe Eindruck, den ich empfange, wenn ich ein sich gleichgebliebenes Ding ein zweites Mal wahrnehme. Wie oft spricht man nicht auch von „Produktionen", wo man eigentlich von den Produkten reden müsste, und dergl.!

Der Doppelsinn des Hülfszeitworts „sein" als Kopula und als Existenzbehauptung — z. B. Der Pegasus ist geflügelt und *ist* (d. h. existirt) doch überhaupt nicht! — hat jahrhundertelang die Logiker vexirt, ja in der Irre herumgeführt. Auf den Doppelsinn mancher Wörter der eigenen Sprache wird man durch das Studium fremder Sprachen erst aufmerksam gemacht; so durch die französische Unterscheidung zwischen „pouvoir" und „savoir" auf den Doppelsinn des deutschen „können"; auf den der Verba „haben" und „sein" (letzteres in noch einer andern als der vorhin erwähnten Hinsicht) durch die Unterscheidung zwischen „haber" und „tener" resp. „ser" und „estar" im Spanischen. Ist „Vorstellung" doppelsinnig als Akt und als Resultat des Vorstellens, so haben wir uns bestrebt, das Wort hier immer nur im letztern Sinne zu gebrauchen.

Triftig bemerkt Jevons, dass hierin selbst die Logiker sich nicht viel besser gezeigt haben, als andere Leute. Unter dem Wort „Negation" werden wir selbst, eben notgedrungen dem Sprachgebrauch huldigend, nicht umhin können, bald zu verstehen die Operation des Negirens, bald aber das Ergebniss dieses Prozesses.

Der Doppelsinn eines Worts ist um so ungefährlicher, je weiter die Gebiete des Denkens (Begriffssphären), denen seine verschiedenen Bedeutungen angehören, auseinanderliegen. So dürfte z. B. der Doppelsinn des Wortes „Widder" zur Bezeichnung des Sternbilds im Tierkreise einer- und des männlichen Schafes andrerseits (ev. auch noch für eine mittelalterliche Belagerungsmaschine) nicht leicht Verwechselungen nahe legen.

Auf die aus Meinungsverschiedenheit unter den Menschen entspringende Mehrsinnigkeit von Ausdrücken, wie „die schönste Frau", „das beste Verfahren", etc. macht die Logik von Port-Royal noch aufmerksam.

Univoken Termen (termini) begegnet man besonders in der Sprache der Technik und Wissenschaft, und sieht sich jede Disziplin genötigt, dergleichen nötigenfalls sich selbst zu schaffen, sei es durch *Restriktion*, Einschränkung eines schon vorhandenen Wortes der Sprache auf eine bestimmte unter seinen landläufigen Bedeutungen — mitunter auch unter *Spezialisirung* oder *Generalisirung*, Verallgemeinerung desselben, also Verengerung oder Erweiterung seiner Bedeutung — sei es durch *Einführung ganz neuer Wortbildungen*.

Überhaupt sehen wir die Sprache, um den beständig sich steigernden Bezeichnungsbedürfnissen zu genügen, in einem notwendigen *Wachstum* begriffen, zu welchem ausser den soeben erwähnten Prozessen noch besonders auch beisteuert das *„Differenziiren" der Synonyme*, welches darin besteht, dass man Wörter, die bisher wesentlich als gleichbedeutende gebraucht wurden, anfängt (mit in bestimmter Weise verschiedenem Sinne) unterscheidend zu gebrauchen. In Illustration dieses Verfahrens müssten wir oben beginnen, die Synonyme „zweideutig" und „doppelsinnig" auseinanderzuhalten, und werden auch noch andere Beispiele als wünschenswert, zweckmässig oder unumgänglich bei Gelegenheit sich darbieten.

Ein einsinniger Name, soviel sich absehen lässt, ist beispielsweise „Kathedrale", obwol er (als ein Gemeinname) sehr vielen individuellen Gebäuden, wie dem Kölner Dome, dem Strassburger Münster, etc. beigelegt werden mag. Als ein sehr vielsinniger Name dagegen erscheint „die Kirche" (Jevons l. c.). Bald wird darunter nur verstanden das Gebäude, in welchem religiöse Handlungen vorgenommen, Andacht verrichtet wird, bald auch bedeutet der Ausdruck die ganze Körperschaft, Gemeinde der Personen, welche zu einem bestimmten Bekenntniss gehören, bald nur die religiösen Autoritäten oder die Körperschaft der Priester, den Klerus, die Hierarchie im Gegensatz zum Laienelemente, bald endlich auch die gesamte Organisation, Institution als solche, und in fast allen diesen Fällen wechselt der Ausdruck noch obendrein seine Bedeutung je nach der Konfession oder Sekte, für welche derselbe (gewöhnlich stillschweigend) in Anspruch genommen wird.

Es bedarf kaum des Hinweises, dass vielsinnige Namen sich besonders leicht zur Irreführung namentlich der unkritischen Menge, der Volksmassen hergeben, und sehen wir solche Praxis auch mit den Schlagwörtern politischer Parteien von Demagogen und Propaganda machenden Agitatoren vielfach geübt. Der Missbrauch gleicht dem Taschenspielerkunststückchen, durch welches dem nichtsahnenden Publikum ein Ding für ein anderes mit Geschick untergeschoben wird, indem unvermerkt für die eine Bedeutung des Namens in Anspruch genommen wird, was genau besehen nur für die andere anerkannt werden konnte und aufrecht erhalten werden könnte — natürlich mit dem Erfolg, das Urteil zu korrumpiren. Auch bieten die doppelsinnigen Wörter bequeme Vorwände und Angriffspunkte für den Streitlustigen dar, indem es leicht ist, mit Unterstellung, Insinuation der einen

Bedeutung des Namens gegen dasjenige zu eifern, erfolgreich zu polemisiren, was unter demselben Namen im Grunde von einer ganz andern Sache — und vielleicht mit Recht — behauptet worden ist. Desgleichen machen sie es leicht, den Gegner, der den Namen in mehrerlei Sinne brauchte, oder (wie sollte er auch anders!) abweichenden Gebrauch bei Andern zuliess, der Inkonsequenz, anscheinend des Widerspruchs zu überführen. Etc.

χ_1) Ungeachtet der hervorgehobenen eminent praktischen Wichtigkeit sorgfältigen Achtens auf etwaige Doppelsinnigkeit verwendeter Namen oder Zeichen gebührt den vielsinnigen Namen doch eigentlich keine Stelle in dem System der Logik selbst. Ihre Betrachtung liegt von rechtswegen nur der *angewandten* Logik ob. In der Theorie müssen wir die fundamentale Anforderung der Einsinnigkeit, kraft welcher erst ein Zeichen seiner Bestimmung voll zu genügen vermag, jeweils als erfüllt voraussetzen und dieses Ideal, bevor wir zu Nutzanwendungen schreiten, allemal vorgängig zu erfüllen trachten.

Hierzu ist es ausreichend, einen etwa vorgefundenen vielsinnigen Namen (wie man nach früherem sagen kann) zu „differenziiren", das heisst hier: so viel verschiedene Namen aus ihm zu machen, als in wie viel verschiedenen Bedeutungen er gebraucht werden soll. Leicht wird dies hingebracht, indem man ihn z. B. durch einen Buchstaben repräsentirt und diesem alsdann Indices 1, 2, 3, ... anhängt, je nachdem man ihn in seiner ersten, zweiten u. s. w. Bedeutung verstanden haben will.

Der doppelsinnige Name gilt in der Logik für ein *Paar* von Namen, die nur zufällig gleichen Klang haben; er repräsentirt uns ganz verschiedene Objekte des Denkens, Objekte, die darum doch nichts miteinander zu schaffen haben sollen. Von diesen wird zu sagen sein, dass sie „*homonym*" durch ihn bezeichnet seien.

Ein Hauptgrund, weshalb die grosse Mehrzahl der Wörter sich als mehrsinnig erweist, ist darin zu erblicken, dass von psychologischen Momenten beherrscht die Sprache in ihrer historischen Entwickelung sich so häufig bewogen sah, einen Namen von den einen auf andere Dinge zu *übertragen* (zu transferiren), die mit jenen eine hervorragende *Analogie* offenbarten oder auch nur mit ihnen regelmässig sich *assoziirt* zeigten — wie z. B. „(Stände-)Haus" auf die gesetzberatende Körperschaft der Volksvertreter.

Nicht selten *kriecht* so gewissermassen ein Name vom einen Ding zum andern, bis schliesslich oft keine grössere Gemeinschaft zwischen seinen verschiedenen Bedeutungen erkennbar ist, als zwischen irgend welchen mit ganz verschiedenen Namen belegten Objekten (Mill).

Namentlich aber — und dies ist das wichtigste Moment — hatte die Sprache alle Ausdrücke für Objekte, Qualitäten und Verhältnisse auf den geistigen Gebieten einst zu entlehnen aus dem naturgemäss zuerst

erschaffenen Wörterschatze für das sinnlich Wahrnehmbare in der materiellen Welt. Sie musste so neben der „*eigentlichen*" und ursprünglichen, der Bedeutung „*katexochēn*" oder „par excellence" auch noch eine „uneigentliche", „*übertragene*" oder „*metaphorische*" Bedeutung den entlehnten Wörtern (oder ihren Zusammensetzungen) beilegen — wie dies z. B. geschieht, wenn wir von einer glänzenden That, einem brillanten Geschäft, einer bittern Enttäuschung u. s. w. reden.

Wer solchen Unterschied missachtet, wird leichtlich den Regeln der Logik gemäss zu absurden oder lächerlichen Folgerungen geführt werden. Treffend illustrirt dies De Morgan, indem er darauf aufmerksam macht, dass der Satz „Nur der Weise ist (wirklich) reich" (Solus sapiens est dives) logisch vollkommen äquivalent ist mit dem Ausspruche „Jeder Reiche ist weise" (Omnis dives est sapiens) — jedenfalls sehr schmeichelhaft für die Reichen! Natürlich war das erste „reich" im übertragenen Sinne genommen, als: reich an inneren, an Schätzen des Gemütes, gesegnet mit Zufriedenheit, etc., das zweite aber konnte — ohne weiteres — nur im eigentlichen Sinne als „reich an Geld und (äusserm) Gut" — aus psychologischen Gründen — verstanden werden.

Von jenem Recht der Metapher macht auch heute noch die Sprache fortgesetzt und in erspriesslicher Weise Gebrauch, vornehmlich in ihren poetischen Produktionen, und da ist es keineswegs der Wissenschaft und Logik zur Last zu legen, wenn dieselbe mit ihrer Analyse, mit logisch-wissenschaftlicher Zergliederung oft gleichsam den prachtvollen Farbenschmelz von den Flügeln des Schmetterlinges abzustreifen und blos ein kahles Gerippe übrig zu lassen scheint — sondern nur ihrer unvollkommnen Anwendung. Wir missgönnen der Poesie ihre Freiheit nicht, wir bewundern sie vielmehr ob der Geschicklichkeit und Macht, mit der sie auf die Veredelung des Geschmackes, des ganzen Fühlens und Denkens breiter Bevölkerungsschichten hinzuwirken und gelegentlich auch — vornehmlich auf ethischem Gebiete — erhebende und wichtige Wahrheiten grossen Volksklassen, dem Einfältigen gleichwie dem Gebildeten, zum Bewusstsein und zu Anerkennung zu bringen versteht, allein wir müssen aus dem uns *hier* vorliegenden Untersuchungsfelde solche Freiheit thunlichst bannen.

ψ_1) Wir haben bis jetzt hauptsächlich gehandelt von *Dingen, Vorstellungen* und *Namen*, indem wir uns bestrebten, hierüber eine erste, zum Teil auch wol unerlässliche Basis zu fernerer Verständigung zu gewinnen.

... Im Einklang etwa mit De Morgan's[2] Kapitelüberschrift „On objects, ideas and names". Dem letzten dieser Themata pflegen deutsche Werke über Logik entweder gar keine oder doch nur eine sehr stiefmütterliche Behandlung angedeihen zu lassen, wie mir dieselben denn überhaupt von Anfang ihren Flug meistens zu hoch zu nehmen scheinen. Ausführliche und gründlichere Betrachtungen dagegen finden sich diesem Gegenstand häufig in englischen Darstellungen der Logik gewidmet und sind in dieser Hinsicht vor allem die Werke von Mill[1] und Jevons[6] empfehlend hervorzuheben (neunte resp. siebente Auflage). Dieselben zeigen hierin sich

wenigstens ernstlich bestrebt — wie dies auch Leibniz von sich sagt (vergl. Trendelenburg l. c.) immer — die ersten Prinzipien zu suchen, „welche sonst als trocken und ohne Reiz die Köpfe kaum kosteten und schnell wieder fahren liessen".

Das dritte der obigen Themata (mit dessen Betrachtung wir noch nicht zu Ende sind), scheint mir nun aber den naturgemässen Ausgangspunkt zu bilden, an welchen die ferneren Themata der Logik als einer Lehre von den *Begriffen*, *Urteilen* und *Schlüssen* (in neuerer Abgrenzung auch noch *Methoden*) anzuknüpfen sind. In der That:

In der mit Schöpfung einer Sprache verknüpften Notwendigkeit der *Namengebung wurzelt* auch *die Bildung der „Begriffe"*.

Es bedarf und verdient dies näher dargelegt zu werden, doch mögen wir an den Kernpunkt der Frage erst nach einigen weiteren Vorbetrachtungen herantreten — vergl. η_2) und folgende Chiffren.

ω_1) Zunächst wol in der Welt des äusserlich Wahrnehmbaren bemerken wir, dass manche Dinge sich nahezu unverändert, stetig, in der Zeit forterhalten, dass sie, wie man sagen kann, eine zeitlang, oft eine lange Zeit hindurch, *„dieselben"* (genauer: sich gleich-) bleiben. Die Kontinuität wird zunächst in unserm Bewusstsein hergestellt, indem wir bei andauernder sowie wiederholter Wahrnehmung des Dinges inne werden, dass es uns als „dasselbe" (the same) erscheint, als welches es uns schon früher erschienen ist, und schreiben wir auch dem der Erscheinung des Dinges zugrunde liegenden Wirklichen die entsprechende Stetigkeit des Daseins zu. Die Sprache benennt dieses Ding, gibt ihm einen Namen, der bei jeder erneuten Wahrnehmung ebendieses Dinges ausschliesslich gebraucht wird, desgleichen, wenn man kundgeben will, dass man sich dasselbe in freier Erinnerung vorstelle, m. a. W. wenn man von ebendiesem Dinge reden will. Der Name wird ein *„Eigenname"* (nomen proprium, singular term) — im gewöhnlichen Sinne des Wortes — sein.

In des Wortes engster Bedeutung genommen sollte der „Eigenname" nur das Ding in einem bestimmten Augenblick, Momente seines Daseins bezeichnen dürfen. Das gegenwärtige Berlin ist ein anderes als das Berlin vom Ende des vorigen Jahrhunderts, daher „Berlin" streng genommen erst dann ein Eigenname, wenn als bekannt gelten kann, aus welcher Epoche man es sich vorstellen will.

Merkur, Venus, Erde, Mars, etc. sind beispielsweise darnach Eigennamen. Indessen illustriren unsre Beispiele das Wesen des Eigennamens bis jetzt erst einseitig, indem sie hinsichtlich dessen, was sie bedeuten, alle herausgegriffen sind aus der Sphäre der *konkreten* Dinge oder Gegenstände.

Ein Ding heisst ein konkretes, wenn es einerseits vollkommen isolirt denkbar, andrerseits mit allen seinen Merkmalen (Teilen, Attributen und Beziehungen) gemeint ist oder genommen werden soll. So vermögen wir uns den Erdball ganz gut für sich allein zu denken, und wenn wir von ihm reden, so meinen wir denselben mit allem „was darum und daran ist", ohne irgend etwas ausschliessen zu wollen, was gültig von ihm ausgesagt werden könnte.

Die Gegenstände der materiellen Welt sowol als auch die in ihr wahrnehmbaren lebenden Wesen, Pflanzen, Tiere, Personen und Gruppen von solchen (z. B. der Odenwald, die Familie des N. N., die Güter dieser Familie, das 24. Regiment der gegenwärtigen deutschen Armee, etc. — nicht minder aber auch erdichtete persönliche Wesen, wie Cerberus, Circe, Polyphem und Bucentaur) können darnach als konkrete Objekte des Denkens bezeichnet und mag dementsprechend ihr Name ein nomen *concretum* jeweils genannt werden.

α_2) Aus der Vorstellung eines konkreten Dinges vermögen wir nun aber auch gewisse Elemente abzusondern und mehr oder minder vollkommen in unserm Geiste zu isoliren, eventuell erst, nachdem diese Vorstellung nach gewissen Richtungen noch weiter ausgebildet, entwickelt oder vollendet worden ist. Solche Teilvorstellungen im weitesten Sinne des Worts (resp. das ihnen zugrunde liegend gedachte Wirkliche) nennen wir *„Merkmale"* desselben (nota, mark — im Singular).

Gelingt solche Isolirung vollkommen, so heisst das Merkmal ein *Teil* (pars, part) des Dinges*) und wird sich auch seinerseits wieder als ein konkreter Gegenstand in's Auge fassen lassen.

So ist der Dunstkreis der Erde (die etwa bis zu 1 mm Druckhöhe gerechnete Atmosphäre), so sind die unsre Erde zusammenhängend bedeckenden Wassermassen, der afrikanische Kontinent, ein Berg etc. als Teile des Erdballs, so ist der Kopf, die Hand als Teil eines Menschen zu bezeichnen. Sie sind auch selbst konkrete Gegenstände. Nichts hindert, sie uns auch ohne die übrigen Teile, mit denen sie verbunden

*) Es ist dabei erforderlich und vorausgesetzt, dass man sich das Ding selbst erst isolirt denke. Würden wir einen Körper mitsamt seinem Schatten als das Ding hinstellen, so wäre auch der Schatten als ein „Teil dieses Dinges" zu bezeichnen; er ist deshalb aber doch nicht ein „Teil des Körpers", weil letzterer von vornherein ohne den Schatten zu denken gewesen wäre. Eine solche Exemplifikation muss aber hier ausgeschlossen erscheinen, da wir den Schatten nur als solchen über oder in etwas, als auf einem materiellen Körper haftend, zu denken vermögen, und ihn darum selbst nicht als Konkretum (für sich, oder auch mit ganz anderm verknüpft) hinstellen durften.

sind, zu denken, wie denn sehr häufig auch der Teil vom Ganzen mechanisch abgetrennt zu werden vermag, die Möglichkeit solcher Trennung wenigstens allemal einleuchtet und in manchen Fällen auch anfangs blos der Teil bekannt ist, ohne dass man vielleicht von dem Dasein des Ganzen, dem er angehört, auch nur eine Ahnung besitzt. Umgekehrt ist zu merken, dass die *Teile* eines Dinges auch zu den *Merkmalen* desselben in der Logik zu rechnen sind. Es sind auch die Borsten ein Merkmal des Schweins (nicht etwa blos der Umstand, dass es überhaupt Borsten besitzt, welcher allerdings auch ein Merkmal, aber eine durch Abstraktion gewonnene Verallgemeinerung des vorigen wäre, welche wesentlich nur auf dasjenige hinauskommt, worin das Schwein mit andern Borsten tragenden Geschöpfen übereinstimmt), und ist die Mähne, sowie der in ein Haarbüschel endigende Schweif Merkmal eines männlichen Löwen.

Gelingt jene Isolirung (Absonderung, Vereinzelung) *nicht* vollkommen, so nennen wir das vorgestellte Ding etwas Abstraktes, seinen (Eigen-) Namen ein nomen *abstractum*. Wir haben dann Veranlassung zu reden von „*Attributen*" des gedachten Dinges, als da sind *Qualität* oder Eigenschaften und Thätigkeiten, und *Quantität*, sowie von *Beziehungen* (Relationen), darunter Ursache, Wirkung und anderes.

So die Farbe dieser Blumenkrone, die Elasticität und Festigkeit der Stahlfeder, mit welcher ich eben schreibe, das Gewicht des Erdballs, seine Gestalt, Volum und derzeitige Lage im Weltraum, seine augenblickliche Entfernung von der Sonne, Geschwindigkeit, die Kraft, mit der er angezogen wird, etc. — die Schönheit der Circe etc. — dies alles sind abstrakte Eigennamen.

Die als deren Bedeutung verbleibende Vorstellung ist in der That dadurch gewonnen, dass man sie von der Gesamtvorstellung des konkreten Gegenstandes gewissermassen abzog, sie in den Brennpunkt der Aufmerksamkeit rückte und von dem Komplex aller übrigen Vorstellungselemente (nebst dem, was ihnen zugrunde liegt) absah oder abstrahirte. Solche Isolirung jener aus dem Gesamtbilde hervorgehobenen Vorstellung erweist sich aber bei genauerem Zusehen nicht als eine vollkommen durchgeführte und durchführbare, wie ich dies für das erste und noch ein späteres der angeführten Beispiele versuchen will genauer darzulegen.

Jene beispielsweise rote Farbe können wir uns zwar wol völlig losgelöst von jedem Gedanken an die Blumenkrone, der sie eignete, als eine blos subjektive Lichtempfindung vorstellen, und wenn wir etwa für die vor mir liegende Blumenkrone von Anfang an nur deren

Vorstellung gesetzt hätten, so würde das aufgestellte Unterscheidungsmerkmal uns im Stiche lassen und läge kein Grund für uns vor, das Element der roten Farbe in dieser Vorstellung als ein Abstraktum gegenüberzustellen der ganzen Vorstellung als einem Konkretum (die wir ja vielmehr von unserm Standpunkte auch selbst schon als ein Abstraktum bezeichnen müssen). Es läge dann der Fall vor, dass wir, anstatt von den *Dingen*, blos gesprochen hätten von unsren *Vorstellungen* über diese, ohne jede Bezugnahme auf etwas ihrer Erscheinung zugrunde liegendes Wirkliches. Wollen wir aber nicht aufhören solche Bezugnahme aufrecht zu erhalten, wollen wir fortfahren nach wie vor von *Dingen* zu reden, dann freilich können wir jene rote Farbe nicht anders denken als wie als Farbe *von etwas Farbigem;* und wird auch die Vorstellung ebendieses farbigen Etwas im übrigen möglichst unvollendet gelassen, so musste dasselbe doch als vorhanden notwendig mit gedacht werden und ist die Isolirung jener roten Farbe keine vollständige gewesen.

Ähnlich musste auch der vom Erdball eingenommene Raum z. B. als von etwas erfüllt, als Ausdehnungsform irgend einer Materie gedacht werden, von welcher er nie völlig loszulösen ist.

Wir betreten hiermit allerdings ein streitiges Gebiet. Ob man den Raum sich absolut leer denken könnte, einen Zeitraum ohne jeden Vorgang in demselben, den Geist auch ohne Körper, darüber ist viel hin und her gestritten worden. (Ich würde bis zur Erbringung eines Gegenbeweises diese Fragen verneinen. Die Erscheinung des Todes hat es uns leicht gemacht, den Leib auch ohne Seele, isolirt zu denken — wir nennen ihn Leichnam; ich würde aber, wenn von dem Leibe eines *lebenden* Wesens lediglich als Materie ohne Rücksicht auf dessen Beseelung gesprochen wird, auch diesen strenge genommen für ein Abstraktum zu erklären mich verpflichtet glauben.)

Im Hinblick auf solche Kontroversen dürfte die Bemerkung am Platze sein, dass die Unterscheidung zwischen „abstrakt" und „konkret" für unser Hauptthema (soweit wir dasselbe zu führen vermögen) sich (noch) belanglos erweisen wird (ein Grund für diese Erscheinung wird sogleich, im folgenden Kontext ersichtlich). Wesentlich kommt es uns hier nur darauf an, zunächst die Bedeutung des *Eigennamens* und nachher die des *Gemeinnamens* klarzulegen, zu welchem Ende wir dieselbe allerdings wol in ihre Hauptvarietäten hinein verfolgen müssen.

Ich muss auch gestehen, dass mich die obige Auseinandersetzung für die Scheidung der Merkmale in Teile und Attribute, die wir hier — ich denke wol im Anschluss an das üblichste Verfahren — genetisch zu entwickeln versucht haben, nicht völlig befriedigt. Die Erde z. B. zieht nach dem Gravitationsgesetze ein jedes Massenteilchen des Weltraums an, und können überhaupt zwischen ihr und irgend einem andern Objekt des Denkens

vom Geiste Beziehungen wahrgenommen oder hergestellt werden. Um dasjenige vorzunehmen, was wir oben die Isolirung ihrer Vorstellung nannten, müssen daher grosse Merkmalgruppen von der auf die Erde bezüglichen Gesamtvorstellung von vornherein ausgeschieden und losgelöst werden; es ist auch *dazu* schon eine Art von Abstraktionsverfahren erforderlich, und erscheint es geboten dabei auf die Raumerfüllung der Erde, ihre Charakterisirung als das einen bestimmten Raumteil Erfüllende vermittelst einer ihr zugedachten Begrenzung, sich zu berufen — und ähnlich auch bei den übrigen als konkrete hinzustellenden Gegenständen.

Dass nun solch' spezieller, gleichwie auch irgend ein anderer Abstraktionsmodus, durch welchen eine Vorstellung zu einer isolirten gestaltet wird, für die (allgemeinen) Gesetze folgerichtigen Denkens nicht von Belang sein wird, ist zu gewärtigen.

Die Begriffe von *Quantität* und *Qualität* exakt und allgemein zu charakterisiren dürfte überhaupt zu den schwierigeren Problemen der Philosophie gehören — ich habe eine mir ganz genügende Erklärung nirgends auftreiben können. Gleichwol ist die Frage eine fundamentale, da auf ihr doch die Lehre von den „gleichartigen", vergleichbaren oder durch einander messbaren Grössen und die Scheidung zwischen Mathematik und Logik (im engern Sinne) beruht:

Von einem vorgestellten Dinge vermögen wir durch Abstraktion einen *Teil* abzusondern und ebenso vermögen wir ein *Merkmal* abzusondern, welches *nicht Teil* sondern eine Eigenschaft, Thätigkeit oder Beziehung des Dinges ist. Die schwierige Frage ist, worin sich wol jene, die *quantitative* von dieser der *qualitativen* Sonderung der Vorstellungselemente unterscheidet? Wir glaubten den Unterschied in der vollkommenen Isolirbarkeit jener erstern im Geiste (sowol als eventuell in der Wirklichkeit) gegenüber der unvollkommeneren Isolirungsfähigkeit der letztern erblicken zu sollen.

Möglich auch, dass diese Begriffe der Qualität und Quantität (?) zu den Urbegriffen zu zählen sein werden, die in Form einer Definition einer Erklärung überhaupt nicht fähig, oder dass sie auch, wie der Begriff des „Maasses", erst mittelst langer Reihen von Schlüssen aufgestellt werden können.

Mill freilich macht es sich hier bequem, indem er sich im wesentlichen begnügt zu sagen: Quantität sei dasjenige, wodurch sich ein Liter Wasser von zwei, drei oder zehn Litern Wasser unterscheidet, worin er aber mit einem Liter Branntweins oder Schwefelsäure übereinstimmt, Qualität dasjenige, worin jene übereinstimmen und diese sich unterscheiden. So leicht es aber erscheint, treffende Beispiele hier anzuführen, so schwierig erscheint es uns, den Gegensatz allgemeingültig zu charakterisiren.

Es mag auch eine Wissenschaft, die sich ein für allemal nur mit auf eine bestimmte Weise hergestellten Abstraktionsergebnissen beschäftigt — wie die Geometrie mit den räumlichen Gebilden — solche (relativ) als Konkreta hinstellen, und diesen erst und ihren (dann ebenfalls konkret zu nennenden) *Teilen* als Abstrakta gegenüberstellen die *Attribute* der Gestalt, Grösse und Lage, Entfernung etc. jener Gebilde.

Im Grunde würde alsdann nur konkret und abstrakt genannt werden, was eigentlich als abstrakt in erster und in zweiter Potenz oder — wenn man will — im ersten und im zweiten Grade (absolut genommen) hingestellt werden müsste. — Von einem selbst durch den Abstraktionsprozess gewonnenen Objekte lassen sich ja häufig selbst wieder Merkmale noch weiter fort abstrahiren.

β_2) Nicht anders, wie in Hinsicht der Qualitäten verfährt man auch bei (wahrgenommenen) *Beziehungen* zwischen Dingen: auch solche mögen wir mit Eigennamen belehnen.

Bemerken wir z. B., dass drei gewisse Sterne ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Schenkel fast doppelt so lang ist, wie die Grundlinie (und zwar allemal wieder, wenn sie allnächtlich wiederkehren), so können wir zunächst die Figur oder Gruppe selbst als ein Sternbild (und Konkretum) mit einem Eigennamen bezeichnen; aber wir können sogar auch das genannte abstrakte Seitenverhältniss (von nahe zwei zu eins), desgleichen den Neigungswinkel α des einen Schenkels gegen den andern, etc. als „Ding" je mit einem aparten Eigennamen belegen (falls solches uns der Mühe wert erschiene). Ich will dies hier besonders hervorheben, um zu erinnern, dass ich das Wort „Ding" in unsern Betrachtungen stets so allgemein wie möglich gefasst wissen möchte, und in diesem Sinne für jedes (nach Ort, Zeit und Abstraktionsmodus) völlig bestimmte „Ding" einen „Eigennamen" für zulässig erachten muss. Einen solchen stellt allemal schon die Beschreibung vor, durch welche uns das zu denkende, zu betrachtende Ding als ein singulares, unzweifelhaft bestimmtes kund gegeben wird — wenngleich die letztere der für Namen in der Regel wünschenswerten Kürze entbehren wird, und um ihrer teilhaftig zu werden etwa durch einen Buchstaben ad hoc zu ersetzen wäre.

Auch der Gewinn z. B., den ein bestimmtes Geschäft für einen bestimmten Teilhaber N. N. abwerfen wird — wir mögen denselben ja x nennen —, ist so ein Eigenname, und ebenso würde sein Anrecht auf diesen Gewinn ein solcher sein.

γ_2) Und nicht blos die Dinge aus der Aussenwelt, wie in früheren Beispielen, sondern auch solche aus der Welt des Bewusstseins, aus dem Geistesleben, sind eines Eigennamens fähig, und sie werden eines solchen teilhaftig, sobald wir sie mit Worten unverkennbar charakterisiren.

Auch meine Absicht, nachher spazieren zu gehen, die freudige Überraschung, die (ein bestimmter) Jemand beim Erfahren einer gewissen angenehmen Nachricht empfinden wird, die Eifersucht, die zwei bestimmte Nebenbuhler zur Zeit auf einander haben — alles dies (immer in der suppositio nominalis betrachtet) sind Eigennamen.

δ_2) Was ein Eigenname bedeutet, das werden wir häufig als etwas Spezielles, *Individuelles*, als ein „*Individuum*" unter den Objekten

des Denkens (in allerdings dem ursprünglichen Sinn dieses Wortes gegenüber sehr erweiterter Bedeutung) anzuführen haben.

Ich muss hier noch einer Ansicht gegenübertreten, zu welcher die Lektüre von Mill (besonders von p. 37 sq. der Schiel'schen Übersetzung, desgl. von p. 40 sq.) verleiten könnte: dass der Eigenname an sich bedeutungslos oder nicht-bezeichnend (nonconnotative) sei. Das neben andern ähnlichen von Mill gewählte Beispiel „Johann" erscheint in dieser Hinsicht keineswegs beweisend, denn „Johann" ist (in unserm Sinne) kein *Eigen*name — es sei denn mit solchen Zusätzen, dass er eine ganz bestimmte Person bedeutet — sondern ein *Vor*name, und kommt als solcher einer ausgedehnten Klasse von Personen zu. So ist denn freilich der Name ein ziemlich nichtssagender und gibt uns wenig Aufschluss über das Wesen einer Person, welche denselben führt.

Der Eigenname ganz im Gegenteil ist ein möglichst ausdrucksvoller zu nennen, indem er ein ganz bestimmtes Ding bezeichnet mit allen seinen Merkmalen, bekannten sowol als unbekannten, sofern letztere ihm zukommen.

Mill[2] selbst auch schränkt seine Behauptung auf einer folgenden Seite (p. 38) wieder ein, indem er Ausnahmen statuirt, für welche er die Grenze anscheinend willkürlich zieht; es wäre in der That durchaus nicht abzusehen, weshalb uns zwar „die Sonne" eine Menge Attribute mitbezeichnen sollte, dagegen Mill's eigner Name „John Stuart Mill" z. B. nicht?

Demgemäss erscheint mir auch die Unterscheidung von „mitbezeichnenden" (connotativen) und „nichtmitbezeichnenden" (non-connotativen) Namen, von welchen Mill so grosses Aufhebens macht, als eine gänzlich belanglose, genauer gesagt: überflüssige. Es bleibt mir von dem Gegensatze, wenn ich ihn schärfer in's Auge fasse, nichts anderes übrig als der allerdings sehr belangreiche Unterschied zwischen einem *Eigennamen* und dem (mit einem Begriff verknüpften) *Gemeinnamen;* das übrige löst sich in Dunst auf. Für solchen Gegensatz aber nochmals besondre gelehrt klingende und — fast möchte ich sagen: schwülstige — Benennungen einzuführen scheint keineswegs Bedürfniss.

ε_2) Nicht unwichtig ist es noch, zu beachten, dass die dem abstrakten Substantivum zugeordneten *Adjektiva*, sofern sie überhaupt als Namen gelten können, doch im allgemeinen als konkrete Namen bezeichnet werden müssen.

So ist weisse Farbe oder Weisse ein nomen abstractum, dagegen weiss = ein weisses Ding = Etwas weisses muss offenbar zu den nomina concreta gerechnet werden, indem es ja das (konkrete) Ding selbst bezeichnen soll, welchem das Attribut der weissen Farbe zukommt. Ebenso ist (räumliche) Ausdehnung ein Abstraktum, dagegen ausgedehnt, räumlich = Etwas ausgedehntes; Konkretum: ein jeder Körper kann so genannt werden. Vergl. noch Leben und lebendig, Nutzen und nützlich, Gleichheit, Ähnlichkeit, Verschiedenheit und gleich, ähnlich, verschieden, Dankbarkeit und dankbar etc. hinsichtlich ihres Gegensatzes als Konkreta und Abstrakta.

Ausgedehnte, gleiche, ähnliche oder verschiedene Dinge können freilich ebensogut aus der Sphäre der Abstrakta genommen sein, wie z. B. auch

ein geometrischer (sonach immaterieller) Körper, eine Fläche, mathematische Linie, der Schatten räumlich ausgedehnt, ein Zeitraum wenigstens „ausgedehnt" genannt werden mag. Es lässt demnach (was Mill und Jevons zu übersehen scheinen) sich nur behaupten, dass die aus abstrakten Substantiven abgeleiteten Adjektiva konkret sein *können*, aber nicht müssen, sie können oft auf beiderlei Weise verwendet werden und nehmen in Wahrheit eine Zwitterstellung ein. Andere, wie „dankbar", freilich kann man unbedenklich als Konkreta hinstellen, denn Dankbarkeit lässt sich (es sei denn im übertragenen Sinne) nur einem lebenden Wesen, also Konkretum, zuschreiben.

ζ_2) Versuchen wir nun einmal, uns auf den Standpunkt zu stellen, als ob es uns obläge, eine Sprache zu erschaffen, ganz nach Belieben Wörter oder Zeichen zu bilden und solchen ihre Gebrauchsweise vorzuschreiben.

Auf den Unterschied unsrer Bestrebungen von denen der Volapükisten werden wir noch zu sprechen kommen — vergl. α_3) in dieser Einleitung, Fussnote.

Es erscheint dann keineswegs als eine leichte Aufgabe auch nur zu jenen schon unter ξ_1) erwähnten zehn Wortarten zu kommen, welche wir in unsern Kultursprachen thatsächlich gebildet vorfinden. Dieselben genetisch zu erklären, sie gewissermassen aus den Bedürfnissen der Bezeichnung und Mitteilung herauswachsen zu lassen und so als zur Befriedigung dieser Bedürfnisse erforderliche, in solchem Sinne *notwendige* nachzuweisen, dürfte vielmehr höchst schwierig sein, wofern die Aufgabe überhaupt lösbar.

Das gleiche wäre auch zu leisten für die etwaigen Beugungsformen, Flexionen jener Wortarten, wie namentlich die Konjugationsformen der Verba, und die Deklinationsformen der Substantiva (Adjektiva und Pronomina), mit welchen dann auch die Bestimmung oder Mission der Präpositionen in nächstem Zusammenhange steht, dergleichen ja in vielen Sprachen Kasus vertreten.

Es müsste in solcher Untersuchung auch die Frage beantwortet werden, mit wie vielen und welchen Wortarten, Kasus und Tempora etc. man (im Minimum) bereits auszureichen vermag, wie viele Arten von sprachlichen Gebilden oder — sagen wir kurz — „Sprachformen" also unerlässlich wären, mit welchen Formengruppen man die Zwecke des Gedankenausdrucks gleicherweise, mit welchen aber am besten erreichte und was die etwa überzähligen Formen für Vorteile gewährten.

Soweit die Lösung dieser Aufgabe gelungen wäre, hätten wir eine wirkliche Analyse der Sprache gewonnen, eine zugleich wissenschaftliche und *allgemeine Grammatik*, welche die den Kultursprachen gemeinsamen Elementarformen auch als unentbehrliche und notwendige erkennen liesse, wogegen sie andrerseits die von Sprache zu Sprache wechselnden Gebilde ignoriren würde.

Es würde diese allgemeine Grammatik des Vorzugs geniessen, dass in ihr gerade dasjenige ausser Betracht bleiben dürfte und zu bleiben hätte, was beim Erlernen einer fremden Sprache jeweils die grössten Schwierigkeiten zu bereiten pflegt — als da sind: die verschiedenen Arten von Konjugation und Deklination, welche die „spezielle" Grammatik uns oft so ermüdend als erste, zweite, dritte etc. aufzählt und vorführt, dazu die Unregelmässigkeiten der Verba, der Wortstellung und des Satzbaues, namentlich aber auch die dem Ausländer das Deutsche so sehr erschwerenden drei Genera von den in dieser unsrer Sprache mit „der", „die" oder „das" ganz ohne jeden objektiven Grund zu verknüpfenden (unpersönlichen) Hauptwörtern und ebenso die Divergenzen zwischen Schrift und Aussprache, wie sie vor allem in der unphonetischen Schreibung des Englischen sich so „bemühend"*) kundgeben, auch anderes mehr.

Für ein engeres Gebiet, nämlich für dasjenige der *Zahlen*bezeichnung, sehen wir die analoge Aufgabe bereits gelöst vor uns. Hier kann in der That leicht der Nachweis geliefert werden, dass, wofern nicht mehr als zehn Ziffern sollen verwendet werden dürfen, eine systematische Darstellung aller natürlichen Zahlen nicht besser erreicht zu werden vermag, als sie durch die jetzt allgemein üblichen Ziffernzusammenstellungen in unserm aus Indien überkommnen dekadischen Systeme bereits verwirklicht wird; es kann diese Zahldarstellung als eine aus Zweckmässigkeitsgründen auch notwendige gerechtfertigt werden.

Dass ähnliches aber für das *ganze* Gebiet der sprachlich bezeichneten oder bezeichenbaren Objekte durchaus nicht gelingt, dürfte seinen Grund vor allem darin haben, dass eben dieses mit der Sprache gegebene Bezeichnungssystem sich an Vollkommenheit entfernt nicht messen kann mit dem in der angedeuteten Richtung für die Objekte der Arithmetik bereits verwirklichten Bezeichnungssysteme.

Hat dieses nun seine Richtigkeit, so muss an Stelle jenes obenerwähnten Ideals einer „allgemeinen" Grammatik ein anderes treten: das rationellste Bezeichnungssystem für die Benennung aller Objekte und den Ausdruck aller Vorgänge des Denkens erst zu entdecken und als ein notwendiges zu rechtfertigen.

Auf dieses Ideal werden wir in der That noch weiter hinarbeiten.

η_2) Gehen wir nun von dem eingenommenen Standpunkte auch nur ein Stück weit, auch einen Schritt nur vor, so leuchtet zunächst die Notwendigkeit ein, neben den (bisher besprochenen) Eigennamen, die jeweils ein ganz bestimmtes „Ding" bezeichnen, nur *einem* solchen

*) Der Ausdruck ist besonders im deutsch-schweizerischen Idiome eingebürgert.

zukommen, auch solche Namen zu schaffen, die auf *viele* Dinge passen; es erhellt die Notwendigkeit der Schöpfung auch von *Gemeinnamen*.

Ich denke, dass die Erforderlichkeit von Namen überhaupt zur Bezeichnung von Dingen und insbesondre von Eigennamen um je von einem bestimmten Dinge reden zu können, keiner weitergehenden Rechtfertigung bedarf, und werden auch die Betrachtungen, die wir anzustellen haben, um das Bedürfniss nach Gemeinnamen klar zu legen, zum Teil höchst trivialer Natur sein. Es dürfte solchen gleichwol nicht jedes Verdienst abzusprechen sein.

Denken wir uns eine Anzahl Personen im Vollbesitze einer beliebig grossen Menge von Eigennamen — aber zunächst *nur* von solchen — also dass das gleiche Wort sich bei allen jeweils mit der („gleichen") Vorstellung von dem *nämlichen* bestimmten (übrigens beliebig konkreten oder abstrakten) Dinge mit unfehlbarer Sicherheit assoziirt, so wird sich mit Denknotwendigkeit erkennen lassen, dass diese Personen unfähig sein werden einander irgendetwas mitzuteilen, was sie nicht bereits laut Voraussetzung wussten. Ich will z. B. sagen, dass der Schnee weiss ist, aber weil ich nur über Eigennamen verfüge, kann ich dies nicht in Bezug auf den Schnee überhaupt thun, sondern nur in Bezug auf einen bestimmten Schnee, der z. B. an bekanntem Orte liegt, ich kann es auch nicht sagen in Bezug auf jeden Teil dieses Schnees, sondern nur in Bezug auf eine bestimmte Portion desselben, als Ganzes, die ich kurz als „dieser Schnee" bezeichnen will. Die Weisse dieses Schnee's mag sich durch ihren genauen Helligkeitsgrad auch von derjenigen jedes andern Schnee's unterscheiden. Ich kann nicht sagen, dass dieser Schnee weiss überhaupt ist, wie andre weisse Körper, sondern weil ich auch nur den Eigennamen für „diese Weisse" von dem erwähnten eigentümlichen Helligkeitsgrade zur Verfügung habe, so kann ich auch diesem Schnee nur gerade diese Weisse zu- oder absprechen. Von den Personen, die meinen Ausspruch hören werden, wissen alle, was unter „dieser Schnee" gemeint ist (laut Voraussetzung), desgleichen was „diese Weisse" bedeutet, und werden dieselben sich auch darunter sofort, wenn der Name fällt, etwas jener bestimmten Empfindung weisser Farbe (mit dem erwähnten charakteristischen Helligkeitsgrade) zugrunde liegendes Wirkliches übereinstimmend vorstellen. Es kann nun aber sein, dass der Eine oder Andere der genannten Personen gleichwol noch darüber unwissend ist, dass diesem Schnee gerade diese Weisse zukommt, und dass ich es ihm sagen will. Laut Voraussetzung habe ich nun aber auch blos einen Eigennamen für gerade *dieses* hier vorliegende Zukommen, oder ich habe keinen. Im letztern Falle kann ich es nicht statuiren oder mitteilen; im erstern aber, wo „dieses Zukommen" ein (laut Voraussetzung) im gemeinsamen Besitz der beteiligten Personen befindlicher Eigenname gewesen sein sollte, muss eben der Andre dasselbe schon gekannt haben, er musste damit bereits wissen, dass diesem Schnee diese Weisse gerade *so* zukommt, im Widerspruch zu der obigen Annahme, dass er darüber unwissend gewesen. Ergebniss: ein Bezeichnungssystem, das blos Eigennamen umfasste, ist notwendigerweise zur Übermittelung irgendwelcher Erkenntniss unzulänglich. Dasselbe vermöchte höchstens, bereits vorhandene Erkenntniss-

elemente — durch Anrufen derselben — wiederzubeleben oder in's Feld der Aufmerksamkeit zu rücken.

Um einen Ausspruch thun zu können, der eine Information zu liefern vermöchte, brauchen wir mindestens für die Kopula, welcher in unserm Beispiel „das (erwähnte) Zukommen" oder „der Besitz" entspricht, ein Wort von allgemeiner Bedeutung, das einen Gemeinnamen vertritt, und können damit dann allerdings als etwas für den Vernehmenden möglicherweise Neues sagen: „Dieser Schnee" besitzt „diese Weisse".

Wir wollen nun nicht weiter ventiliren, mit welchem minimalen Bestand an Gattungsnamen ein Bezeichnungssystem den Zwecken sprachlicher Mitteilung schon ausreichend zu genügen vermöchte — in Anbetracht, dass auch andere Momente dahin drängen, solche in grosser Menge zu schaffen, und dass ein Reichtum der Sprache an Gattungsnamen nur vorteilhaft erscheint.

ϑ_2) Zunächst haben wir aber die *vielwörterigen* Gattungsnamen, welche sich aus einwörterigen und vielleicht auch andern Wortzeichen „ableiten" — etwa rationell in Gestalt einer Definition oder Beschreibung aufbauen — lassen, von unsrer Betrachtung natürlich auszuschliessen und unser Augenmerk zu richten auf die Erstellung der als „ursprüngliche" *einwörterig* zu gestaltenden Namen, die zu dem weiteren Aufbau uns erst die Bausteine abgeben sollten.

Schon die oberflächlichste Überlegung zeigt, dass es gar nicht durchführbar sein würde, ein Jedes, was Objekt des Denkens werden mag, mit einem Worte als *Eigennamen* zu benennen.

Das wäre schon in Bezug auf die Dinge der Aussenwelt unthunlich. Wie möchten wir z. B. Geometrie treiben, wenn jede Seite jede Ecke etc. eines jeden von irgend jemand in Betracht zu ziehenden Dreiecks ihren eigenen Namen führte, wenn sie von der Sprache je mit einem besonderen Worte bezeichnet würde und werden müsste? So ausserordentlich gross die Kombinationsfähigkeit der Buchstaben zu aussprechbaren Silben und so zahlreich die Arten auch sind, auf welche diese Silben sich zu Worten verknüpfen lassen, sie würden doch bei weitem nicht hinreichen um solchen Bedarf an Eigennamen zu decken. Kein menschliches Gedächtniss aber würde die Kraft besitzen, wären solche Namen auch schon geschaffen (irgendwie, beliebig eingeführt), dieselben mitsamt ihrer Bedeutung zu *behalten*, ganz abgesehen von der Schwierigkeit, sie zu *erlernen*.

Das Erlernen würde hier immer noch (in gewissem Umfange) wenigstens als möglich erscheinen.

Prinzipiell unmöglich aber müsste es genannt werden, falls die gleiche Praxis der Belehnung aller Dinge mit Eigennamen auf die Gebilde der geistigen Welt angewendet werden wollte. Da sich die Zustände des Bewusstseins eines Menschen, als namentlich seine Wahrnehmung von Unterschieden oder von Übereinstimmung an den Dingen, seine Empfindungen, Vorstellungen und Absichten etc. für die andern Menschen nicht sinnlich zur Wahrnehmung bringen lassen, da sich nicht, wie auf die Aussendinge auf solche hinweisen lässt, so wäre hier gar kein Weg denkbar, auf welchem

eine Sprache, die alle individuellen Bewusstseinszustände je mit Eigennamen bezeichnete, überhaupt Gemeingut einer Mehrheit von Menschen werden könnte. Schon die Erlernung der Sprache bliebe hier ein vornhause aus unlösbares Problem.

Wir brauchen also Gemeinnamen.

ι_2) Der *Gemeinname* (nomen appellativum, general term) sollte *mehrere* Dinge bezeichnen dürfen, solchen einzeln und sozusagen mit gleichem Rechte zukommen.

Der Gemeinname „Planet" z. B. kann der Erde sogut wie dem Mars, Jupiter oder Saturn etc. beigelegt werden. Wir dürfen darum sagen: Die Erde ist (ein) Planet, Mars ist Planet, Jupiter ist Planet.

Hierdurch erscheint die Anwendungsweise des Gemeinnamens geregelt, soferne *mit* ihm etwas sollte ausgesagt werden, insoweit er also zum Prädiziren dient — zunächst wenigstens: insofern er in der Form des Singulars *Prädikat* einer Aussage wird.

Die mittelst Eigennamen bezeichenbaren singularen, besonderen, bestimmten oder individuellen Dinge, welche so der Gemeinname „umfasst", über die sich seine Bedeutung „erstreckt" und von deren jedem er für sich im Singular prädizirt werden darf, setzen eine „*Klasse*" (oder „*Gattung*") zusammen, von der sie die „*Individuen*" genannt werden. So sind Merkur, Venus, etc. bis Neptun die Individuen der Klasse der Planeten oder der Gattung „Planet".

Das Wesen der obigen Verwendungsweise besteht nun darin, dass der Gattungsname sich auf seine Individuen, wie man sagt: „*distributiv*", verteilt — so nämlich, dass er jedem einzelnen dieser Individuen ganz (und ungeteilt) zukommt.

Es geht nichts, kein Teil von ihm verloren, wenn er einem Individuum beigelegt, zugeteilt wird, und man behält ihn immer noch ganz übrig, um ihn ebenso auch einem zweiten, dritten etc. Individuum zuzuteilen. Die vorliegende ist sonach eine eigentümliche Art von „Verteilung", welche sich etwa der Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit vergleichen liesse: werden hundert Personen von einem Scharlachkranken infizirt, so wird eine jede derselben nicht etwa blos des hundertsten Teiles, sondern der ganzen Krankheit, schlechtweg des Scharlachfiebers, teilhaftig (auch verliert Derjenige, von welchem der Krankheitskeim sich auf die Andern überträgt, die Krankheit dadurch nicht).

Gelegentlich der Erläuterung des „Distributionsgesetzes" werden wir in § 12 Veranlassung nehmen, noch andere (und schönere) Vergleiche heranzuziehen zur Verdeutlichung der eigentümlichen Natur dieser hier in Betracht kommenden Verteilungsweise, der „distributiven" oder „qualitativen", und ihres Gegensatzes zur andern von den beiden denkbaren Haupt-Verteilungsweisen, nämlich der gewöhnlichen oder „quantitativen" Verteilung.

Analog auch dürfen wir mit der Pluralform von den Individuen irgend einer in jener Klasse enthaltenen Gruppe, wie Venus, Erde, Mars, sagen: dieselben seien „Planeten“.

$\varkappa_2$) Auch umgekehrt soll unter dem Gemeinnamen (oder „Gattungsnamen“), wenn *von* ihm etwas ausgesagt wird, *stets* nach Belieben dieses oder jenes („irgendein“ any) Individuum der Klasse verstanden werden dürfen — unter „Planet“ also, wenn man will, die Erde, oder auch der Merkur, etc.

Durch diese wichtige Vorschrift erscheint der Gebrauch, die Anwendungsweise der Gattungsnamen auch in der andern Hinsicht geregelt, soferne er nämlich selbst als Gegenstand, *Subjekt* einer Aussage auftreten wird.

Wird diese Vorschrift konsequent befolgt, so wird also, was von der Gattung ausgesagt wird, auch von jedem ihrer Individuen Geltung beanspruchen.

Eine Aussage, deren Subjekt Gemeinname ist, eine Klasse vorstellt, wird ein *allgemeines* oder *generelles* Urteil (judicium generale, general statement) genannt — im Gegensatz zu einer Aussage, deren Subjekt ein Eigenname ist, ein Individuum vorstellt, welch' letztere wir ein *singulares* oder *Einzel*-Urteil (judicium singulare, singular statement) nennen werden.

So dürfen wir beispielsweise sagen: Der Planet läuft um die Sonne, denn Merkur umläuft die Sonne, Venus umläuft die Sonne etc. Neptun läuft um die Sonne.

Die letztere Aussage ist Beispiel eines *singularen* Urteils, die erste illustrirt ein *generelles* Urteil; dasselbe ist auch gleichbedeutend, äquivalent mit „*Jeder* (every planet, each) umläuft die Sonne“ sowie mit „*Alle* Planeten laufen um die Sonne“ und exemplifizirt jene besondre Art von generellen Urteilen, die man als „*universale*“ bezeichnet.

Dagegen würde ein Satz wie: „*Einige* Planeten (some planets) haben Monde“ zwar auch als ein generelles, aber nicht als ein universales, sondern als „*partikulares*“ Urteil hinzustellen sein.

Endlich wird eine Aussage von der Art wie: „Ein Planet ist (von lebenden Wesen) bewohnt“ ein „*unbestimmtes*“ Urteil genannt.

Wir wollen auf diese Unterscheidungen, welche zunächst vorwiegend als sprachliche erscheinen, gleich hier schon aufmerksam machen, weil auf sie im Text gelegentlich Anspielung gemacht werden wird, während sie nach ihrem logischen Gehalte, systematisch, erst später in Betracht gezogen werden.

Dagegen ist ein generelles Urteil unrichtig, wenn dasselbe nicht für jede der als zulässig festgesetzten Bedeutungen des als sein Subjekt auftretenden Gattungsnamens, nicht für jedes Individuum der Klasse, zutrifft. Es würde z. B. der Ausspruch: „Der Planet hat (einen oder mehrere) Monde“ unberechtigt sein, weil er schon für die Venus (z. B.) als unwahr anzuerkennen ist.

Wir müssen es uns für unser eigentliches Thema vorbehalten, die Wirkung obiger Grundsätze, durch welche der Gebrauch von Gemeinnamen geregelt werden muss, in die verschiedenen Ausdrucksformen der Sprache hinein zu verfolgen, und etwaige Abweichungen von denselben, welche die Sprache sich (inkonsequenterweise) gestattet, gelegentlich zum Bewusstsein zu bringen.

Auf die geschilderte Weise nun ermöglicht es uns der Gemeinname, beliebig viele singuläre Urteile zu einer einzigen — eben der generellen oder allgemeinen Aussage — abkürzend zusammenzufassen. Es wird damit ein ökonomisches Haushalten mit den Mitteln des Ausdruckes erstmalig angebahnt, und erscheint das Verfahren schon wegen der Häufigkeit, mit welcher solche Ersparniss anzubringen ist, von immensem Vorteile. Unabsehbar steigert sich noch diese Wirkung, wenn wir — in Gestalt des „Begriffes“ — demnächst ein Mittel erkennen werden, auch „offene“ Klassen zu bestimmen, Klassen, welche oft eine unbegrenzte Menge von Individuen umfassen.

λ_2) Der Gattungsname kann als ein „*mehrdeutiger*“ oder „*vieldeutiger*“ bezeichnet werden, indem ihm eben mehrere Bedeutungen mit gleichem (und vollem) Rechte zukommen.*) Er tritt dadurch in Gegensatz zu dem als „*eindeutig*“ (determinative) zu bezeichnenden Eigennamen sowie zu dem Namen „Nichts“ (oder „rundes Quadrat“), welchen wir (wie schon früher „unsinnig“, so nun auch) „*undeutig*“ nennen mögen.

Wie man sieht, ist hiernach zwischen „*zweideutig*“ und „doppelsinnig“ ein wesentlicher Unterschied anzuerkennen. Ein zweideutiger Name wäre z. B. „meine Hand“; derselbe würde aber vollkommen „*ein*sinnig“, univok gebraucht, wenn wir nur logisch berechtigte Urteile fällen, wie: „meine Hand hat fünf Finger“ und dergl.

Zweideutig ist in der Arithmetik die Quadratwurzel aus irgend einer von Null verschiedenen Zahl (in ihrer ursprünglichen Bedeutung, als allgemeinste, „volldeutige“ oder „Generalwert“ aufgefasst). Sie wird erst doppelsinnig, wenn man etwa — was nicht erlaubt ist — dieselbe und ihren „Hauptwert“ homonym benennt oder bezeichnet. Einsinnig bleibt

*) Es mag nämlich auch jedes Individuum der Gattung *eine von seinen Bedeutungen* genannt werden, wogegen die ganze Gattung oder Klasse „seine Bedeutung“ schlechtweg ausmacht. Die Ausdrücke: „*eine* Bedeutung“ und „*die* Bedeutung“, als verschiedene gekennzeichnet durch den unbestimmten und den bestimmten Artikel, werden bei Gemeinnamen unterscheidend gebraucht.

sie (bei aller Zweideutigkeit), sobald die Arithmetik eine korrekte Darstellung findet.

Erst durch unberechtigt schwankenden Gebrauch, in der Art, wie wir es unter v_1) geschildert haben, kann ein vieldeutiger Name auch zu einem doppelsinnigen gestempelt werden — gleichwie auch schon ein eindeutiger: man denke z. B. an einen schlechtweg nach „Königsberg" adressirten Brief, wo es doch mehrere Städte dieses Namens gibt, von denen aber nur eine hier gemeint sein konnte und bei einem andern, dem Wortlaut nach ebendahin adressirten Brief auch eine andere gemeint sein mag.

Der Gemeinname kann ebenfalls „abstrakt" oder „konkret" genannt werden, je nachdem die unter ihm begriffenen Individuen *sämtlich* als Abstrakta resp. Konkreta zu gelten haben.

„Mut" stellt ein Beispiel für den ersten, „Pferd" ein solches für den zweiten Fall vor. Doch gibt es, wie wir schon hervorgehoben haben, auch Gattungsnamen von gemischtem Charakter („abstrakt-konkreter" Natur), wie „ausgedehnt". Auch ist hier zu wiederholen, worauf wir bereits hinwiesen, dass diese Unterscheidungen von geringem Belang für unsre nächsten Zwecke sind.

μ_2) Vor allem ist noch einer Verwechselung des „Gemeinnamens" mit dem „*Kollektivnamen*" vorzubeugen. Der letztere umfasst allerdings auch eine Mehrheit von unterscheidbaren Dingen, welche, wenn man will, wiederum eine Klasse konstituiren und sich auch unter einem „Gemeinnamen" oder „Gattungsnamen" zusammenfassen lassen; jedoch wird er dadurch zum Kollektivnamen gestempelt, dass bei seinem Gebrauche wesentlich andere Grundsätze maassgebend sind, als für diesen ihm zugehörigen Gattungsnamen.

Der Kollektivname kann zunächst selbst ein Eigenname sein. Als solcher ist er uns nichts Neues und war bei allen unsern bisherigen Betrachtungen über Eigennamen schon immer mit zugelassen; auch *seine* Bedeutung hat nach wie vor als *ein* „Individuum" unter den Objekten des Denkens zu gelten.

Ein solcher ist z. B: „die (gegenwärtige) deutsche Armee"; ein solcher ist ferner „die Gruppe der Planeten" (sie würde zusammen mit deren Monden und der Sonne abermals einen Kollektivnamen: „das Planetensystem" ausmachen); ein solcher ist „die Bibliothek des Herrn N. N.".

Als zugehöriger Gattungsname würde bezüglich erscheinen: „(gegenwärtig eingekleideter) deutscher Soldat", „Planet" und „dem Herrn N. N. gehöriges Buch".

Wir erinnern, dass nach dem unter ι_2) und $\varkappa_2$) Ausgeführten das Wesen des Gemeinnamens in seiner „distributiven" Verwendung bestand.

Durch seine Vermittelung kommen in erster Linie und hauptsächlich Aussagen zustande, die von den Individuen, welche der Gemeinname umfasst, auch einzeln abgegeben werden könnten, ohne dass man nötig hätte, dabei auch an andre (die andern) Individuen dieser Gattung zu denken, auf sie zu reflektiren — mit der Berechtigung also, von allen zwischen solchen Individuen etwa bestehenden Beziehungen von vornherein abzusehen, zu abstrahiren. Mit dem Prädikate freilich können dann auch Beziehungen zwischen Individuen der Subjektklasse statuirt werden.

Wird dagegen ein Name als Kollektivname gebraucht, so werden zwischen den Objekten, die er in sich zusammenfasst, gewisse Beziehungen als vorhanden vorausgesetzt und kommen als solche wesentlich in Betracht. Nicht alle Beziehungen, welche zwischen besagten Objekten betrachtbar, brauchen gegeben zu sein oder als unveränderliche festgehalten zu werden, aber gewisse wenigstens von diesen Beziehungen, oder in gewissen Hinsichten wenigstens gelten diese Beziehungen uns als *feste*. Jene Objekte und eventuell Individuen stehen vor unserm Geiste nicht als eine Klasse, sondern als ein *System*.

Jedenfalls, was von dem Kollektivnamen gültig ausgesagt wird, braucht von den Individuen, die er in sich zusammenfasst, nicht einzeln gültig zu sein. Es darf aufhören zu gelten, sobald man solche getrennt in's Auge fasst, sie separirt. Vielmehr *braucht* jenes Prädikat *nur* der „Gesamtheit" der Individuen zuzukommen (d. i. dem der gleichzeitigen Vorstellung sämtlicher Individuen zugrunde liegenden Wirklichen) *mit Rücksicht auf alle Beziehungen, welche zwischen diesen Individuen* schon (faktisch oder theoretisch) *bestehen*, solange man sie also in dieser ihrer Verbindung miteinander belässt*) (zuweilen auch, sobald man sie erst in gewisse feste Beziehungen zu einander gebracht denkt, bringt). Auch kommt dem einzelnen Individuum der Kollektivname (darum) nicht zu.

Der Flügelmann der ersten Kompagnie des ersten Regiments der deutschen Armee ist „deutscher Soldat"; der Oberst desselben auch; aber er *ist* nicht „(die) deutsche Armee". Die deutsche Armee ist schlagfertig; der einzelne Soldat kann dies auch sein. Aber die deutsche Armee mag auch der gegnerischen Armee überlegen sein, und von dem einzelnen deutschen Soldaten könnte doch jedenfalls nicht ausgesagt werden, er sei

*) Die Individuen selbst müssen gleichwol nicht als gleichzeitig existirende vorausgesetzt werden.

Verdient der Kollektivname die Bezeichnung als eine „*Summe*", „*Quantität*" oder „*Grösse*", so ist sogar gefordert, dass man die Individuen bereits in eine eigenartige Beziehung, Gedankenverbindung gebracht habe, deren Wesen die Arithmetik auseinandersetzt.

der feindlichen Armee überlegen — ansonst wir unser Militärbudget auf die Erhaltung dieses einen Soldaten einschränken dürften. Das Buch „ist" nicht die Bibliothek; die Bibliothek kann viele Tausende wert sein, das Buch gleichwol nicht, etc.

Als Kollektivnamen könnten wir jedes Ding bezeichnen, an welchem überhaupt Teile sich unterscheiden lassen: also vielleicht allein den Punkt, den Augenblick und das Nichts nicht! So ist ein Buch wieder Kollektivname in Bezug auf die in ihm zusammengebundenen Blätter und deren Seiten, eine Seite ebenso im Hinblick auf die auf ihr gedruckten Sätze, Wörter, Silben und Buchstaben. Fast jeden Namen also, mit dem wir bisher ein Objekt des Denkens bezeichnet dachten, mag man einen Kollektivnamen nennen. Es ist darum für die Logik von sehr geringem Belange, eine Unterscheidung zwischen Kollektivnamen und solchen, die es nicht sind, aufzustellen.

Und gleichwie die Eigennamen, von welchen wir bisher gesprochen, so mögen wir auch Gemeinnamen als *kollektive* hinstellen.

„Armee" ist so ein Gemeinname, sofern das Wort geradesogut die deutsche, wie die französische, die englische etc. Armee bezeichnen kann, und zugleich ist es Kollektivname in Bezug auf die einzelnen Soldaten, welche mit ihrer Ausrüstung die Armee zusammensetzen. Ebenso ist „Bibliothek (überhaupt)" Gemeinname und Kollektivname zugleich, ersteres als die Bibliothek des Herrn A, die der Gesellschaft B, etc. letzteres als die einzelnen Bücher umfassend, die sich in ihr befinden. (Jevons[6].)

Ein psychologischer sowol als grammatikalischer Grund, von Kollektivnamen zu reden, liegt wirklich vor, wenn von einer Reihe von Individuen diese einzeln aufgezählt, erwähnt worden sind, und es nun gilt dieselben kollektiv zu einem Ganzen zusammenzufassen.

Wenn aufgezählte Individuen zu einem Gemeinnamen zusammengefasst werden sollen, so bedient sich die Sprache wesentlich anderer Ausdrücke, als wenn dieselben zu einem Kollektivnamen zu vereinigen sind.

Hat man erstern Zweck im Auge, so spricht man (streng konsequent, oder auch nur mit Vorliebe) von einer

Klasse, Gattung, Art, Ordnung, Familie (im weiteren Sinne, z. B. Pflanzenfamilie), einem *Geschlecht*, auch einem *Reich (Bereich)*, einer *Abteilung* etc.

dieser Individuen, im Hinblick dagegen auf letztern Zweck von ihrer (resp. ihrem)

Menge, (Quantität), Gesamtheit, (Summe), Reihe, Folge, ev. *Sequenz, Schar, Haufen, Gruppe, System, Zusammenstellung, Komplex, Inbegriff, Gebiet, Mannigfaltigkeit,*

man spricht von ihnen als von einem *Ganzen*, und vielleicht noch in manchen andern *mehr oder weniger* synonymen Termen.

Das Wort „*Abteilung*" — sowie vielleicht auch schon *Bereich*, *Gebiet* und *Mannigfaltigkeit* — scheint wol in gleicher Weise für *beide* Zwecke disponibel zu sein.

Auffallend ist der grosse Reichtum an Ausdrücken, welche der Sprache zu solchen Zwecken zur Verfügung stehen. Die Wissenschaft (namentlich die Mathematik) hat übrigens schon angefangen diese Synonyme (besonders die der zweiten Gruppe) erheblich zu differenziiren und dürfte darin noch weiter fortschreiten.

Die häufigste Veranlassung dazu, von Kollektivnamen überhaupt zu reden, liegt in dem Auftreten der *Pluralform* von Substantiven, mit kollektiver Bedeutung. Auch sie ist vorwiegend grammatischer Natur. Die Individuen, welche der zugehörige Singular (als Gemeinname)*) distributiv bezeichnet, bezweckt die Verwendung des Pluralis nicht selten, kollektiv zu einem Ganzen zusammenzufassen, während in der Regel freilich auch der Plural nur bestimmt ist, eine Klasse darzustellen.

Dass man, wenn ein Hauptwort im Plural fällt, demselben oft nicht ansieht, ob es mit der Absicht kollektiver oder aber genereller Auffassung gebraucht wird, ist als eine *sehr grosse* Unvollkommenheit der Sprache zu bezeichnen. Wir werden sehen, dass auf der Verwechselung beider Absichten manche Fehlschlüsse beruhen.

Wenn wir z. B. sagen: „Die Anforderungen, welche sein Beruf an ihn stellte" . . . und fortfahren . . . „erfüllte er mit spielender Leichtigkeit", so lässt sich das Urteil als ein generelles auffassen. Fahren wir dagegen fort: . . . „brachten seine Gesundheit zum Wanken", so erscheint dies ausgeschlossen, und ist solches nicht wol von der einzelnen Anforderung, sondern nur von den vereinigten Nachwirkungen aller der aufreibenden Anforderungen gültig auszusagen gewesen. Etc. Zuweilen werden sogar Kollektivnamen gebraucht, um generelle Urteile zu fällen, z. B. wenn wir sagen: die ganze Familie N. N. hat zur Zeit den Keuchhusten. Seine Eltern sind gestorben. Etc.

In der Regel lässt sich allerdings — durch Aufwendung von nur ein wenig Sorgfalt auf die Ausdrucksweise — der Doppelsinn vermeiden, doch ist zu beklagen, dass in dieser Richtung ausserordentlich viel gesündigt wird.

Wie oft begegnen wir nicht Sätzen wie: „dass die drei Winkel eines

---

*) Ein Eigenname kann überhaupt nicht in den Plural gesetzt werden. Man käme dadurch zu absurden Ausdrücken, wie wenn etwa ein Mensch von „seinen Nasen", Köpfen, Vätern, seinen Geburtsstädten und dergl. reden wollte. Schon die natürliche Zahl, wenn grösser als 1, wird unsinnig (um nicht zu sagen „imaginär") sobald als ihre Einheit ein „Individuum" gesetzt wird, als ihre „Benennung" ein Eigenname auftritt, und ist z. B. „fünf John Stuart Mill's (mit dessen Heimatsorte und Geburtsjahr gedacht)" ein gänzlich sinnloser Ausdruck, desgleichen „7 Sonnen" (unseres Planetensystemes).

Dreiecks gleich zwei Rechten sind"*) oder die Quadrate über den beiden Katheten gleich demjenigen über der Hypotenuse*) — in welchen doch das Prädikat nur *der Summe* der im Subjekte aufgezählten Grössen zukommt! Korrekt gedeutet würden jedoch diese Sätze behaupten, jeder Dreieckswinkel für sich sei gleich zwei Rechten und das Quadrat über der Hypotenuse sei gleich dem über einer jeden Kathete. Wie leicht wäre es aber, in solchen Fällen noch das Adverbium *„zusammen"* in den Text, wie sich gehört, einzufügen!

Ebenso muss es als ein wahrer Verderb bezeichnet werden, wenn im Elementarunterricht der Volksschullehrer sagen lässt: „2 *und* 3 *sind* 5", welches bedeutete: 2 ist 5, desgleichen 3 ist 5. Der Satz enthält zwei Fehler (nur!), indem einmal die Konjunktion „und" für das arithmetische Operationszeichen „plus" gesetzt erscheint — dieses ginge aber noch an mit Rücksicht auf den von der Bequemlichkeit der Aussprache beherrschten Sprachgebrauch. In diesem Buche werden wir uns in der That gewissermassen des umgekehrten Fehlers schuldig machen.

Gar nicht zu rechtfertigen ist aber die *Pluralform* der Kopula „2 und 3", verstanden als die Summe 2 + 3, *ist* eine einzige Zahl, und diese („sind" nicht, sondern) „ist" (gleich) 5. Will man im Plural sprechen, wie dies als Bedürfniss erscheinen kann in dem Falle, wo die Zahlen „benannte" sind, wie bei „2 Birnen und 3 Birnen", so ist zu sagen: „sind zusammen 5 Birnen", wofern man nicht vorzieht zu sagen: *„gibt"* (oder „macht") 5 Birnen.

Eine Ausdrucksweise aber, die, wie gezeigt, den Unterschied zwischen Einzahl und Mehrzahl, kollektiver und genereller Deutung verwischt, kann nur verwirrend auf die jungen Köpfe wirken. [Ebenso dulde der Lehrer nicht, falls *a* und *b* Zahlen bedeuten, dass etwa der Schüler spreche, „*a sind* gleich *b*" — und dergleichen mehr.]

Sehr misslich erscheint es besonders, wenn das adjektivische (sog. „unbestimmte") Zahlwort *„alle"* anstatt generell, einmal kollektiv verwendet wird. Die lateinische hat in dieser Hinsicht schärfer unterschieden als die modernen Sprachen. Sie gebraucht generell nur *„omnes"*, kollektiv dagegen *„cuncti"* (zusammengezogen aus con-juncti, für „alle zusammengenommen", joined together). Wir haben im Deutschen noch das Wort *„sämtliche"*, und wäre zu wünschen, dass dieses bislang mit „alle" synonyme Wort davon differenziirt und mit der gleichen Konsequenz unterscheidend gebraucht würde. Vergl. einen in § 4 besprochenen Fehlschluss.

Abgesehen von den erwähnten Fällen der Zusammenfassung aufgezählter Dinge und der in den Plural gesetzten Hauptwörter, wo ein *grammatikalischer* Grund vorliegen kann, einen (einfachen oder zusammengesetzten) Namen als „Kollektivnamen" hinzustellen, ist die

*) Philosophen — ich könnte deren namhafte citiren — sollten derartige Nachlässigkeiten des Ausdrucks sich am allerwenigsten zuschulden kommen lassen.

zwischen solchen und Einzelnamen angängige Unterscheidung nur von *psychologischer* Art. Sie ist objektiv nur in soweit begründbar, als eben an dem überhaupt Benennbaren sich fast immer noch irgend welche Teile unterscheiden lassen, und erscheint im übrigen in unser subjektives Belieben gestellt.

Den Namen eines materiellen Körpers z. B. haben wir zunächst keinen Grund, anders als wie als einen „Einzelnamen" zu bezeichnen. Denselben Namen müssen wir aber als einen kollektiven hinstellen, sobald wir den Körper als eine Atomengruppe studiren. Nach Belieben können wir z. B. auch das Schachbrett als einen Felderkomplex behandeln. Etc.

Die kollektive Vereinigung mehrerer substantivisch benannter Dinge zu einem Ganzen, sowie die kollektive Pluralbildung (resp. -verwendung) ist besonders für die mit Zahl und Maass, mit der Quantität der Dinge sich beschäftigenden Disziplinen von Bedeutung.

Das Studium ihrer Gesetze ist demgemäss aber der *Arithmetik und Grössenlehre* und *nicht* der Logik (*im engern Sinne*) zuzuweisen.

An diesem Scheidepunkte zweigt sich eine grosse Gruppe von Disziplinen von der Logik ab, um sich ihr selbständig und — in Anbetracht des Reichtums der Entwickelung, die sie gefunden — als mindestens ebenbürtig gegenüberzustellen. Und beide Richtungen erscheinen unter diesem Gesichtspunkt ungefähr wie Quantität und Qualität geschieden.

v_2) Bevor wir das *über* ω_1) charakterisirte Ziel noch weiter verfolgen und den Nachweis der dort aufgestellten Behauptung vollends erbringen, scheint es mir wünschenswert, gleich mit den grundlegenden Betrachtungen über *Namen*, ihre Einteilungen und Unterscheidungsmöglichkeiten hier erst zu Ende zu kommen.

Man pflegt Namen auch noch als *positive* (affirmative, bejahende) oder aber *negative* (verneinende) hinzustellen, wie „nützlich" und „nicht nützlich" (nutzlos), „schädlich" und „nicht-schädlich" (unschädlich), „Ich" und „Nicht-ich".

So unleugbar in der That ein Gegensatz zwischen solchen Benennungen (auch ihrer Bedeutung nach) besteht, von denen die eine als „Verneinung", Negation der andern sich darstellt und gerade diejenigen individuellen Objekte auszuschliessen scheint, welche die andere umfasst (und vice versâ), so kann auf diesen Gegensatz doch nicht etwa eine Einteilung der Namen selbst in „positive" und „negative" gegründet werden — in Anbetracht, dass es in unser subjektives Belieben gestellt bleibt, *welchen* von den beiden einander „kontradiktorisch entgegengesetzten" Namen wir als den positiven hinstellen wollen.

So wenn z. B. von geraden Linien in einer Ebene die Rede ist, mögen wir gewisse Paare (oder auch Systeme, Scharen) von solchen Geraden als *„Parallele“* mit einem positiven, andere als *„Nicht-parallele“* mittelst negativen Namens darstellen. Nichts hindert aber auch, die erstern als *„Nicht-schneidende* (Gerade)“ negativ, die letztern als „(einander) *Schneidende* (Gerade)“ positiv zu benennen.

Positiv oder negativ zu sein, ist daher blos ein äusserliches, sozusagen grammatikalisches Merkmal des Namens, welchem in seiner Bedeutung kein bestimmtes Merkmal entspricht, ein logischer Gehalt überhaupt nicht zukommt, unter Umständen aber wol ein psychologischer.

Nur die Beziehung, der Gegensatz zwischen dem durch eine Bejahung und dem durch deren Verneinung gebildeten Namen fällt wirklich dem Bereich der Logik anheim, und mit diesem Gegensatz werden wir uns auch noch eingehend zu beschäftigen haben. (Genaueres hierüber und über die auf diesen Punkt bezüglichen Kontroversen siehe in der siebenten und achten Vorlesung.)

Einen Stein kann man als „nicht-sehend“, dagegen nicht wol als „blind“ bezeichnen. Demgemäss noch gewisse unter den für negativ angesehenen Namen als *„privative“* hinzustellen — wie „blind“, „taub“, „lahm“ etc. — hat nur dann Sinn und ist nur motivirbar, wenn uns eine bestimmte Gattung vorschwebt, zu der ein so prädizirtes Individuum gehört. Entbehrt das Individuum nur eines Merkmals, welches seinesgleichen (den andern Individuen ebendieser Gattung) in der Regel (von rechtswegen, im „normalen“ Zustande) zukommt, so legen wir jenem das „privative“ Prädikat oder Attribut bei. Wegen der einerseits willkürlichen, andrerseits so komplizirten Voraussetzungen (denn was hat wol als „normal“ zu gelten?), auf welchen solche Distinktion beruht, ist dieselbe aber für die elementare Logik von ganz untergeordnetem Interesse.

ξ_2) Dagegen lässt eine wirkliche Einteilung der Namen sich gründen auf ihre Unterscheidung als *absolute* (nicht-relative) und *relative.* Ein „relativer“ Name ist ein solcher, welcher einem Dinge auf Grund des Umstands beigelegt wird, dass es in einer bestimmten Art von *Beziehung* (Relation) zu einem oder mehreren andern Dingen steht — ein Name also, bei dessen Deutung das Vorhandensein auch dieser letzteren Dinge eine Voraussetzung oder Unterstellung bildet.

Z. B. „Ursache, Wirkung, Grund, Folge, Entfernung, Vater, Sohn, ähnlich, gleich, unähnlich, verschieden“ sind lauter relative Namen.

Nichts kann als eine „Ursache“ bezeichnet werden, es sei denn als Ursache *von etwas* (anderem), welches seine „Wirkung“ zu nennen sein wird. Niemand kann Vater heissen, er sei denn Vater *von* Kindern. „Entfernung“ hat keinen Sinn für sich, sondern nur als Entfernung zweier Punkte, Körper oder Dinge im Raume von einander.

Wenn in der Parodie des „Tannhäuser“, welche die Breslauer Studentenverbindung Silesia geschaffen, auf die Bemerkung des Landgrafen, der den Tannhäuser aus der Ferne herankommen sieht:

„Mich däucht, ich kenne diesen Wanderer:
Entweder ist er's, oder s'ist ein anderer“,

der Dichter den Adjutanten wohldienernd sagen lässt:

„Wen Euer Gnaden meinen, weiss ich nicht —
Doch hat er ein *sehr ähnliches* Gesicht“,

so beruht der Witz, resp. die Komik, auf der Verwendung eines relativen Namens, als ob er ein absoluter wäre.

Jene andern Dinge heissen die „Korrelate“, ihre Namen die nomina correlativa zu dem, was das nomen relativum bezeichnet; alle miteinander sind die „Beziehungsglieder“, membra relationis, und die bestimmte Art der zwischen beiderlei Objekten bestehend zu denkenden Beziehung heisst das „fundamentum relationis“.

Das letztere ist oft sehr verwickelter Art, wie bei „Gläubiger“, „Schuldner“, noch mehr bei „Ankläger“ (Kläger), wo das eine Korrelat der „Verklagte“ (Beklagte), ein zweites Korrelat das „Delikt“, Vergehen, sein würde, dessen der letztere vom ersten beschuldigt wird (resp. die eingeklagte Schuldforderung oder Entschädigungssumme), ein drittes Korrelat der Gerichtshof, das „Forum“, vor welchem die Klage anhängig gemacht wird, und endlich ein viertes Korrelat — sofern es nicht durch die vorerwähnten bereits bedingt erscheint und dann nicht mitzuzählen wäre — die Gesetzesbestimmungen, der „Kodex“ und Paragraph, auf die sich die Klage beruft.

Das angeführte Beispiel exemplifizirt ein „mehrfaches Relativum“ (multiple oder plural relative) im Gegensatz zu dem häufigsten Falle, dem des „zweifachen“ (dual relative), wie es z. B. „Wirkung“ mit ihrem Korrelate, der „Ursache“, darstellen würde.

Auch Abstrakta, wie „Gestalt“, „Schönheit“ etc. können hienach schon als duale Relative aufgefasst werden (sofern zu fragen ist: wessen?), wobei allerdings in Bezug auf „Schönheit“, *wie üblich,* übersehen wäre, dass eigentlich der Geschmack des Publikums oder desjenigen, der dieselbe beurteilt, anerkennt, als ein drittes Glied in die Beziehung eingeht.

Indem wir uns hier mit einer blossen Worterklärung begnügten, verweisen wir in Bezug auf Weiteres und Genaueres auf die letzten Vorlesungen in unserm Buche (24. Vorl.).

o_2) Mit obigem sind unsre Betrachtungen über Namen vorerst zu Ende gekommen, und dürfte es sich darnach empfehlen, die Hauptergebnisse übersichtlich zu rekapituliren. Es konnten unterschieden und einander gegenübergestellt werden:

a) *univoke*, d. h. *einsinnige* (wo nicht *unsinnige*)	und *äquivoke* oder *doppel-* und *mehrsinnige*

Namen — desgleichen auch schon Wörter oder Zeichen überhaupt.

Nicht mehrsinnig zu sein war die fundamentale an das Zeichen zu stellende Anforderung, die auf die Forderung der Konsequenz in seinem Gebrauche hinauslief.

Die Wörter zerfielen in

b) *kategorematische* oder *Namen*	und *synkategorematische* oder *Nichtnamen*.

Die Namen waren entweder

c) *Eigennamen* oder *Gemeinnamen*

— jener ein *Individuum* unter den Objekten des Denkens, dieser (distributiv) eine *Klasse* von Individuen bezeichnend — und es bildete dies die für die Logik fundamentale Unterscheidung, mit deren Besprechung wir uns auf längere Zeit zur Not schon hätten begnügen können.

Die Unterscheidung von

d) *Einzelnamen* und *Kollektivnamen*

liess sich indessen kaum anders als wie grammatikalisch oder psychologisch rechtfertigen, indem ausser dem Nichts (0), der Eins, dem Punkt und dem Augenblick so ziemlich alles Benennbare unter irgend einem Gesichtspunkt als ein Kollektivname hingestellt werden durfte. — Ebenso war von den einander gegenübergestellten

e) *positiven* und *negativen*

Namen nur der Gegensatz zwischen beiden logisch begründbar. — Dagegen erschien jeweils

f) *abstrakt* oder *konkret*

und (bei Gemeinnamen) eventuell auch gemischt „abstrakt-konkreter" Natur zu sein als ein in der Bedeutung des Namens selbst begründetes Merkmal, auf das zu achten jedoch für die Logik weniger in's Gewicht fallen möchte, als für die Philosophie überhaupt.

Endlich war die Einteilung der Namen in

g) *absolute* und *relative*

wieder eine durchaus belangreiche — wozu unter den Gemeinnamen auch wiederum solche von „gemischtem" Charakter denkbar wären (indem die Individuen, welche der Gemeinname umfasst, auch teils durch absolute, teils durch relative Namen charakterisirt sein könnten).

Es ist gelegentlich von Wert, sich bei der Verwendung von Namen über diese Verhältnisse Rechenschaft zu geben und darauf bezügliche Fragen vorzulegen.

Recht instruktiv und zu richtiger Anwendung vorstehender Unterscheidungen erziehend ist ein logisches Gesellschaftsspiel: das Ratspiel, bei welchem, unter zeitweiliger Entfernung eines Mitspielenden, sich die übrige Gesellschaft über irgend ein Benennbares, jenem zum Erraten aufzugebendes Objekt des Denkens einigt. Der Ratende hat der Reihe nach an jeden Eingeweihten eine beliebige Frage in Bezug auf das zu erratende Objekt zu stellen, die aber *nur* mit „Ja" oder mit „Nein" — und im Zweifelsfalle mit „Ja-nein" — beantwortet werden darf und korrekt zu beantworten ist; das Fragen mag so lange im Ring herum fortgesetzt werden, bis die Lösung erfolgt, das aufgegebene Objekt vom Ratenden bei seinem Namen genannt, oder aber der Versuch des Ratens aufgegeben wird. Fragen über die Buchstaben und Silben, die den Namen zusammensetzen, sind ausgeschlossen.

Das Spiel gibt oft die überraschendsten Aufschlüsse über die logische und intellektuelle Verfassung einzelner von den beteiligten Persönlichkeiten, und durch die nach erfolgtem Raten häufig sich anspinnende Diskussion als Erläuterung oder Rechtfertigung für gegebene Antworten, sowie durch die zuweilen schon im Laufe desselben mittelst Protests aus der Gesellschaft erfolgende Remedur für eine unrichtig erfolgende Antwort des Einzelnen gibt es vielfach Anregung zur Klärung der Begriffe.

Es können nicht nur individuelle Gegenstände aus der materiellen Welt aufgegeben werden, bei denen die Kategorieen der Zeit und des Ortes meist rasch auf die Spur zu helfen pflegen, sondern auch allgemein gefasste, mittelst Gemeinnamens dargestellte, Objekte — wie z. B. „Schwefelhölzer". Bei einiger logischen Schulung der Teilnehmer pflegen selbst Abstrakta als Gemeinnamen, wie z. B. „der Sommer", „Wahrscheinlichkeit", „der Prädestinationsglaube", „ein Missverständniss" und dergl. unschwer geraten zu werden. Als überraschend reichhaltig erweisen sich die Kategorieen des Zweckes bei den Erzeugnissen menschlicher Kunst.

Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe ist die Einsinnigkeit des zum Raten Aufgegebenen: es muss, falls dessen Name ein doppelsinnig gebräuchlicher sein sollte, die Gesellschaft sich zuvor über eine bestimmte unter seinen Bedeutungen als die hier dem Namen beizulegende geeinigt haben.

Natürlich wird in praxi auch bei dem Ratenden eine Kenntniss von der Existenz des betreffenden Objektes oder wenigstens von seinesgleichen, vorauszusetzen sein. Wer nie von dem neuentdeckten Metall Germanium, vom Neptunsmond Oberon oder von der dunklen (sehr lichtschwachen) Nebensonne des Sirius, vom Sehpurpur, von dem kopflosen Wirbeltier des mittelländischen Meeres, dem Fisch Amphioxus etc. gehört hat, wird solche nicht wol zu raten im stande sein. Und auch bei denjenigen, welchen es obliegt, die Antworten zu geben, muss eine hinlängliche Bekanntschaft mit den Eigenschaften und Ingredienzien, mit dem ganzen Wesen des Ratobjektes vorliegen.

C. Über Begriffe. Einteilung, Definition und Kategorieen, Pasigraphie. Logik des Inhaltes oder des Umfangs? Über Urteile, Schlüsse und deren Folgerichtigkeit. Warum Algebra der Logik.

π_2) Nachdem wir die Notwendigkeit erkannt, dass der sprachenbildende Geist neben Eigennamen auch Gemeinnamen schaffe, drängt sich uns als nächste die Frage auf: *welche* Dinge wir denn je mit demselben Gemeinnamen belehnen sollen?

Behufs ihrer Beantwortung müssen wir uns berufen auf das menschliche *Unterscheidungsvermögen*, ein Vermögen, ohne welches ja kein Studium, keine Wissenschaft, kein Erkennen denkbar erschiene:

Wir sind im stande, Verschiedenes zu unterscheiden und an ähnlichen Dingen Gleichheiten wahrzunehmen.

Die *Gleichheit*, Übereinstimmung (agreement) findet immer nur in einer gewissen *Hinsicht* statt und ist mit Verschiedenheiten (differences), — in anderer Hinsicht — verknüpft, ohne welche uns die miteinander verglichenen Dinge gar nicht als *mehrere* Dinge erscheinen könnten, sondern *identisch, einerlei*, einunddasselbe (oder das nämliche), nur *ein* Ding zu nennen sein würden.

Teile oder Elemente der Vorstellung eines — nötigenfalls vollständig, auch mit allen seinen Beziehungen zu noch andern Dingen — gedachten Dinges, in welchen es mit andern Dingen übereinstimmen oder auch von solchen differiren kann, nannten wir *Merkmale* desselben (genauer gesagt: jeweils das solchen Vorstellungselementen zugrunde liegend gedachte Wirkliche).

Insofern wir häufig ein Ding nicht vollständig auszudenken fähig, müssen wir natürlich neben „bekannten" auch „unbekannte" Merkmale in der Regel zugeben.

Es sei hier nochmals in Erinnerung gebracht, dass (hienach) dem Namen „Merkmal" eine möglichst allgemeine Bedeutung unterzulegen ist; es handelt sich dabei durchaus nicht blos um „Eigenschaften" (oder aber „Thätigkeiten"), die dem Dinge selber, auch wenn es isolirt betrachtet wird, notwendig oder zufällig zukommen (innewohnen), vielmehr kann das Merkmal auch begründet sein in einer „Beziehung", einem Verhältnisse, einer Stellungnahme, welche andere Dinge *zu dem gedachten* einnehmen. Nicht nur gilt uns der Wellenschlag als ein Merkmal des Meeres, sondern es gilt uns auch der Preis, die Käuflichkeit als Merkmal einer Waare. Schon dass er mir, oder einem Andern, *mir nicht*, (als Eigentum) gehört, dass er mir *gefällt*, und dergl. ist als Merkmal eines Gegenstandes hinzustellen, und auch die Abwesenheit bestimmter Merkmalgruppen kann selbst wieder als Merkmal gelten, z. B. als Merkmal einer gewisser Bergspitze, dass noch kein menschlicher Fuss sie je betreten — einerlei auch, ob etwa ein einwörteriger Name dafür vorhanden ist, oder nicht (Merkmal der Jungfräulichkeit, oder Unberührtheit des Gipfels, der „Unerstiegenheit"?). Vergl. hiezu besonders § 15. Dass aber z. B. eine Person A um den Tod einer andern B trauert, lässt sich begreiflicherweise — ohne weiteres — nicht

wol ein Merkmal einer dritten Person (oder Sache) C nennen. Im Merkmal muss eine Bezugnahme auf das Ding zu erblicken sein, sobald wir dieses ausdenken.

Wir pflegen nun jeweils solche Dinge mit *demselben Gemeinnamen* zu benennen, welche dadurch, dass sie einander in Hinsicht bestimmter Merkmale gleichen, sich uns sozusagen von selber zur Belehnung mit dem gleichen Namen empfehlen.

ϱ_2) Schon als Vorbedingung und weiterhin im Verlauf dieses Benennungsprozesses sowie bei dem Gebrauch des dadurch geschaffenen Gemeinnamens treten allemal die übereinstimmenden Merkmale jener Dinge in den Vordergrund der Aufmerksamkeit, denn sie gerade bilden das Band zwischen den wechselnden Vorstellungen der individuell verschiedenen Dinge, welche der Gemeinname umfasst, und dem sich gleichbleibenden Namen. Es wird (in Kant's Ausdrucksweise) auf jene übereinstimmenden Merkmale *„reflektirt"*.

Mit dem Gemeinnamen „teuer" (teures Ding) z. B. werden wir verschiedene Gegenstände nur dann bezeichnen, wenn wir auf die Höhe ihres Preises achten, mit dem Gemeinnamen „rund" nur solche, bei denen auf ihre Gestalt wir unser Augenmerk richten und deren Übereinstimmung mit der Kugelgestalt wahrnehmen. Etc.

Infolgedessen aber spielt sich ab, vollzieht sich im Geiste ein eigentümlicher psychologischer Vorgang, welcher darin gipfelt, dass wir mit dem Gemeinnamen einen *„Begriff"* verbinden.

Die übereinstimmenden Merkmale der Dinge, die wir mit demselben Gemeinnamen bezeichnen, *verstärken* sich gegenseitig im Bewusstsein, werden als wiederholt vorgestellte intensiver gedacht, wogegen deren nicht übereinstimmende Merkmale im Bewusstsein zurücktreten.

In unserm Hirn mag diesem Vorgang ein Prozess entsprechen, welcher treffend verglichen worden ist mit der Vertiefung einer Furche des Ackers, wie sie durch wiederholtes Pflügen entlang derselben bewirkt wird. Schopenhauer[1] zieht zum Vergleiche heran: die durch wiederholte und andauernde Umbiegung längs derselben Kanten sich ausbildende Neigung eines Tuches, sich in bestimmter Faltung zu legen. Bei der unzweifelhaften Feinheit der uns grösstenteils noch unbekannten Vorgänge im Gehirne, welche die Denkhandlungen begleiten und deren Erforschung der Physiologie obliegt, sind jedoch beide Vergleiche nur als sehr rohe Annäherungen aufzufassen, als ein blosser Notbehelf zu nehmen.

Beneke fasst obigen Verstärkungsprozess als eine *Anziehung des Gleichartigen* (in unserm Geiste) auf.

σ_2) Es kann diese Wirkung noch mit bewusster Absicht gesteigert werden kraft eines andern Vermögens des Menschengeistes (auf das

wir nebenher Bezug zu nehmen schon wiederholt Veranlassung fanden) nämlich des *Abstraktionsvermögens:*

Wir sind im stande, auf gewisse Merkmale eines gedachten *Dinges,* m. a. W. in irgendwelchen Elementen unsrer Vorstellung von demselben, *die Aufmerksamkeit zu konzentriren,* dieselben in das Feld der Aufmerksamkeit zu rücken und daselbst mehr oder minder vollkommen zu isoliren, *indem wir von andern Merkmalen absehen* oder „abstrahiren", d. h. die den letztern entsprechenden Vorstellungselemente im Bewusstsein zurücktreten, eventuell sie völlig aus demselben schwinden lassen.

Solch' bewusste Steigerung des durch den Gemeinnamen schon unbewusst eingeleiteten Abstraktionsprozesses wird — aus Gründen der Arbeitsteilung — besonders in den Wissenschaften praktizirt; in diesen pflegt der Geist durch reichliche Übung eine förmliche Virtuosität zu erlangen, von den (für die Untersuchung) unwesentlichen Merkmalen der Dinge abzusehen, alle Nebenumstände jeweils zu vernachlässigen, dieselben zum Behuf seiner eigenen Entlastung zu ignoriren und so befreit dann seine volle Kraft dem Wesentlichen zuzuwenden.

Durch die Abstraktion überhaupt werden Vorstellungselemente soweit isolirt, dass sie auch allein, in gleicher Isolirtheit, reproduzirt zu werden vermögen. Dadurch erlangen resp. erhöhen wir die Fähigkeit, dieselben *allgemein* zu verwenden, nämlich sowol, mit neuen Vorstellungselementen sie zu verknüpfen, als auch in andern Vorstellungskomplexen als diejenigen waren, *aus* welchen sie abstrahirt*) wurden, sie (genauer ihresgleichen) wiederzuerkennen. Vergl. Sigwart[1].

Nachdem wir z. B. vom Schnee das Merkmal der Weisse, weisser Farbe entnahmen, auslösten, abstrahirten, werden wir das gleiche Merkmal in der vorgestellten Nebelwolke, dem Kochsalz, der Gypsfigur, Papier etc. wiederfinden, und würde sich auch jemand eine weisse Maus z. B. vorstellen können, der niemals eine solche gesehen. — Den Anlass zum Vollzug dieser Abstraktion aber bot die Erfahrung, dass es verschiedene weisse Gegenstände gibt, und die Wahrnehmung dessen, worin sie unter sich übereinstimmen und sich von den nicht weissen unterscheiden. Als auf ein anderes Beispiel sei noch hingewiesen auf das Merkmal der „Kugelgestalt" beim Ball, der Seifenblase etc. und auf das Merkmal der „Gestalt" überhaupt, welches wir bei der Melodie, bei einer nach geographischer Länge und Breite bestimmten Himmelsgegend etc. vermissen (als nicht vorhanden erkennen), nachdem es durch Abstraktion aus der Anschauung räumlicher Dinge von bestimmter Begrenzung gewonnen worden.

Die Abstraktion kann schon an der Einzelvorstellung (repraesentatio singularis) ausgeübt, ihr Verfahren schon auf das Individuum angewendet werden.

*) Die Ausdrücke „*etwas* abstrahiren" und „*von* etwas abstrahiren" sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist gleichbedeutend mit „darauf reflektiren", letzteres mit „davon absehen".

Logisch betrachtet ist es gleichgültig für das Ergebniss eines Abstraktionsprozesses, ob man denselben nur *ein*mal, oder öfters, vollzogen habe, ob an *einem* oder an unzähligen Objekten. Psychologisch aber macht solches einen sehr beträchtlichen Unterschied aus, und es dürfte fraglich sein, ob nicht in dieser Hinsicht es geradezu als eine Vorbedingung für die Möglichkeit des Abstraktionsvollzuges hinzustellen ist, dass wir erst der individuellen Verschiedenheit der durch Abstraktion zu sondernden Merkmale inne geworden seien dadurch, dass durch Vergleichung verschiedener Objekte wir die Übereinstimmung der einen neben der Verschiedenheit der andern wahrgenommen.

τ_2) Wir versuchten vorstehend genetisch auseinanderzusetzen, auf welche Weise wir dazu gelangen, uns einen *Begriff*, notio, conceptus, conception zu bilden von den durch einen Gemeinnamen dargestellten Dingen.

Der Begriff ist das — in gewissem Sinne unvollendet, ein „Ideal" bleibende — Resultat des eben (unter ϱ_2 und σ_2) geschilderten Prozesses.

Sein „Wesen" (essentia), oder, wie man auch sagt, seinen „*Inhalt*" (complexus, intent) bilden eben die gemeinsamen Merkmale der mit dem Gemeinnamen bezeichneten Dinge, und zwar seinen „*faktischen*" Inhalt diejenigen der letztern, auf welche bei seiner Bildung reflektirt wurde, seinen „*idealen*" Inhalt aber die sämtlichen gemeinsamen Merkmale überhaupt, welche als solche erkannt werden könnten, die es aber vielleicht niemals vollständig auszudenken möglich.

Im Gegensatz zu diesem Inhalte wird die Gesamtheit, Klasse der unter dem Gemeinnamen (distributiv) zusammengefassten Individuen bezeichnet als der „*Umfang*" (ambitus, sphaera, extent) des zugehörigen Begriffes.

Beispielsweise sind im Begriffe „materielle Substanz" als dessen Inhalt zusammengefasst die Merkmale: ausgedehnt und von bestimmter Raumerfüllung zu sein, d. i. sich irgendwo im Raume zu befinden, die Merkmale der Beweglichkeit, Undurchdringlichkeit, Trägheit und Schwere, überhaupt die Eigenschaft, der Sitz von Kräften zu sein, dazu von unzerstörbarer und unerschaffbarer Masse, also der Masse nach geschätzt, von ewiger Fortdauer zu sein, das Merkmal, eine Temperatur zu besitzen, und anderes mehr. Seinen Umfang macht alles das zusammen aus, was überhaupt Materie heisst: jeder Körper, jeder Teil eines solchen und jede Gruppe von Körpern im Weltall.

v_2) Gemäss der hervorgehobenen zwiefachen Hinsicht — nach

Inhalt und Umfang — in welcher Begriffe betrachtet werden können, sind auch zwei Möglichkeiten denkbar, einen Begriff zu bestimmen.

Dies kann nämlich einerseits geschehen durch Angabe seines Umfanges — sogenannte *Einteilung*, *Divisio(n)*, resp. *Partition**) des Begriffes, und andrerseits durch Angabe seines Inhaltes, das ist *Begriffserklärung, Definition*, auch *Beschreibung*.

So würden wir z. B. durch Aufzählung sämtlicher Planeten eine Umfangsangabe (Division, Partition) des Begriffes „Planet" vollziehen — man würde dazu erst im stande sein, wenn schon alle Planeten bekannt wären. Ebenso aber thun wir dies auch dadurch, dass wir sagen, die Klasse der Planeten zerfalle in die zwei Unterklassen der inneren Planeten, der Erde und der äusseren Planeten.

Die Umfangsangabe des grammatikalischen Begriffes *„Satz"* (sentence) wird geleistet durch den Hinweis, dass der Satz entweder ein *Fragesatz* (sentence interrogative) oder ein *Ausrufungssatz* (sentence ejaculative), oder eine *Wunschäusserung* (sentence optative), oder eine *Bitte* (sentence rogative), ein *Befehl* (sentence imperative) oder endlich eine *Aussage* (sentence indicative, statement, lat. enunciatio — ein Urteil, judgement, judicium) sein wird, m. a. W. dass die genannten Gebilde zusammen alles das ausmachen, was man einen „Satz" nennen kann.

Das Entsprechende leisten wir für den Begriff der „einfachen Farbe" (im Gegensatz zur Mischfarbe), wenn wir sagen, sie sei entweder rot, orange, gelb, grün, blau oder violet mit allen Abstufungen und Übergängen, wie sie das Spektrum eines weissglühenden festen Körpers zeigt.

So mögen wir ferner den Umfang des Begriffs „Wirbeltier" kund geben durch den Hinweis darauf, dass mit Einschluss des Amphioxus die Fische, sowie die Reptilien, Vögel und Säugetiere zusammen die Wirbeltiere ausmachen.

Der Ausspruch: „Die Affekte sind: Liebe, Hass, Freude, Kummer, Hoffnung, Furcht, Humor (!) und Zorn" gibt eine Aufzählung (oder Einteilung des Begriffs) der Affekte.

---

*) In Bezug auf den Namen „Partition" ist der Gebrauch unter den Logikern ein schwankender. Viele wollen darunter nur die Angabe der „Teile" eines Dinges verstanden wissen (z. B. bei der Orange die von Schale, Fleisch und Kernen), wogegen Ueberweg[1] pag. 106 auch die Angabe der „Merkmale (überhaupt)", indess nur eines Einzeldinges — vergl. nachher ψ_2) — als „Partition" hinstellt. Ich würde oben diese letztere Bezeichnung der gebräuchlicheren „Division" vorziehen, in Anbetracht, dass mir für jene „Aufzählung der Teile" ein einwörteriger Name überhaupt nicht Bedürfniss erscheint, dass ferner Ueberweg's „Partition" (hier) als ein besondrer Fall der „Definition" hinzustellen ist, der eines aparten von „Definition" verschiedenen Namens ebenfalls nicht bedarf, sodass zunächst der Name „Partition" zu beliebiger Verwendung frei wird, in Anbetracht endlich, dass wir uns genötigt sehen werden, den Namen „Division" (sowie das Divisionszeichen) in einem von dem obigen gänzlich verschiedenen Sinne späterhin zu gebrauchen, womit dann also eine Doppelsinnigkeit mehr in die Wissenschaft der Logik Eingang fände, die nach unserm Vorschlag vermieden wird.

Die *Einteilung* kann geradezu auf eine *„Klassifikation"* hinauslaufen, sofern man nämlich bei ihr nicht (oder nicht durchaus) auf die Individuen selbst zurückgeht, sondern dabei sich auf gewisse Unterklassen als dem Umfange nach schon bekannte Begriffe (die sog. „Einteilungsglieder", membra divisionis) beruft. Durch an sie gestellte wissenschaftliche Anforderungen wird indess der Begriff der „Klassifikation" noch weiter eingeengt.

Fortgesetzte Einteilung auch der zunächst sich darbietenden Unterklassen oder Teilungsglieder führt in letzter Instanz (zuguterletzt) immer auf die *Individuen* als etwas (dem „Umfange" nach) „nicht" weiter „Teilbares" (zurück).

Umfasst — wie in der grossen Mehrzahl der Fälle — der Umfang eines Begriffes *unbegrenzt viele* Individuen, ist deren Klasse eine *offene*, so lässt sich dieser Umfang niemals erschöpfend angeben dadurch, dass man auf die Individuen selbst zurückgeht; vielmehr sieht man sich alsdann genötigt, zur Umfangsangabe auch solche Unterklassen heranzuziehen, die selbst wieder offene sind, und entweder als schon bekannte vorauszusetzen sind, oder, wenn sie erklärt werden sollen, dies nur vermittelst *Inhalts*angabe, Definition eines ihnen zugehörigen Begriffes zu werden vermögen. Bekannt wiederum konnten zwar die Individuen einer beliebig grossen Menge noch einzeln, der unbegrenzte Rest jedoch ebenfalls nur durch Innewerdung ihres begrifflichen Inhalts geworden sein.

Exempel: Die unbegrenzte Reihe der Individuen, welche wir „natürliche Zahlen" nennen, lässt sich zwar beliebig weit, doch niemals fertig aufzählen. Irgendeinmal muss die begriffliche Bestimmung derselben eintreten, und am besten geschieht dies gleich von vornherein; man wird sie „definiren" als „Summen von Einern", d. i. als die Ergebnisse eines Verfahrens, durch welches hinter 1 fort und fort $+ 1$ angehängt wird.

Ebenso lassen sich die Punkte, die innerhalb einer gegebenen Ellipse liegen, nur durch ebendies Merkmal, oder auf eine darauf zurückkommende Weise, sie lassen nur begrifflich sich allesamt bestimmen.

Die Umfangsangabe erscheint darum als das unvollkommnere der beiden Mittel, einen Begriff zu bestimmen. Zudem überlässt sie uns noch ungelöst die Aufgabe, erst den Komplex der in allen unter den Begriff fallenden Individuen übereinstimmenden Merkmale ausfindig zu machen, zu entdecken, durch deren Verknüpftsein dieselben von allen nicht unter diesen Begriff fallenden Individuen unterscheidbar sind. Sie lässt somit das Wesen des Begriffes unerörtert, lässt uns den Reifen vermissen, der gleichsam als Fassdauben die Individuen erst zusammenhält.

Auch ist noch ein Umstand zu beachten: Wenn wir die Bestimmung eines Begriffs durch Umfangsangabe versuchen, so erscheint die Auswahl der Objekte des Denkens, die als seine Individuen hinzustellen sind, von vornherein in unser Belieben gestellt. Wie immer man auch solche Auswahl treffen mag, so lässt sich in dem Zufall, der unsre subjektive Willkür lenkt und sie gerade auf diese und auf keine andern Objekte als die zu Individuen zu erhebenden (vielleicht auf's Gerathewohl, at random) verfallen lässt, in der That ein ebendiesen und nur diesen Individuen gemeinsames Merkmal erblicken, in gewissem Sinne also auch von einem „Begriffe" reden, welcher der so gebildeten Klasse von willkürlich zusammengelesenen Objekten zugeordnet wäre.

Indessen leuchtet ein, dass solchermassen künstlich geschaffenen, „erkünstelten" Begriffen ein wissenschaftlicher Wert in der Regel nicht zukommen wird. Ein solcher wird wol nur solchen Begriffen zuzusprechen sein, die entweder entsprungen sind aus der Erkenntniss übereinstimmender Merkmale an *gegebenen* Objekten, die diesen unabhängig von subjektiver Laune notwendig oder faktisch zukommen, oder welche dadurch, dass sie ein gegebenes, ein bestimmt *angebbares* Merkmal enthalten, eben dienen sollen Objekte unsres Denkens zu bestimmen.

Wenn schon sie allerdings missbraucht werden könnte, so wird es schwol nicht ratsam erscheinen, der Freiheit der Begriffsbildung irgend welche Schranken von vornherein aufzuerlegen. Vergl. γ_3).

φ_2) Die Begriffserklärung, Definition*), zu der wir nach obigem zum Behufe der Begriffsbestimmungen greifen werden, sieht sich vor eine andere Schwierigkeit gestellt.

Zunächst lassen die Merkmale, welche den unter einen Begriff fallenden („zu seiner Kategorie gehörigen") Individuen „gemeinsam" sind, und welche in ihrer Verbindung dessen *idealen* Inhalt ausmachen, sich überhaupt nie vollständig aufzählen. Der volle Inhalt des Begriffs lässt nie sich fertig „beschreiben". Denn wieviele Merkmale man auch schon berücksichtigt haben mag, so werden sich stets noch neue gemeinsame Merkmale angeben lassen, auf welche noch nicht geachtet worden ist. (Vergl. nachherige Beispiele.)

Die Definition verzichtet daher in der That auf die *unmittelbare* Angabe des ganzen Begriffsinhaltes. Sie begnügt sich, direkt, *explicite*, nur einen Teil desselben, den Rest aber blos *mittelbar*, *implicite* anzugeben, indem sie unter den übereinstimmenden Merkmalen eine gewisse Gruppe hervorhebt von solchen Merkmalen, welche die übrigen alle involviren, mitbedingen, nach sich ziehen, zur Folge haben — sei es

*) Wir sprechen hier nur von der (allein als haltbar zu erkennenden) „*Nominaldefinition*" der schulmässigen Logik und betrachten das unklare Ideal der sog. „Realdefinition" als durch die Ausführungen von Mill, Sigwart und Andern abgethan.

auf Grund logischer Denknotwendigkeit allein, sei es auch mit denknotwendiger Bezugnahme auf die anerkannten Grundsätze einer wissenschaftlichen Doktrin, wie die Naturgesetze, Rechtsnormen und dergl.

Diese in der Definition hervorgehobenen Merkmale können als *charakteristische* oder „wesentliche" Merkmale des Begriffes (notae essentiales) hingestellt werden; doch ist nicht zu übersehen oder zu vergessen, dass die Bedeutung dieses Namens ein willkürliches Moment in sich schliesst, indem schon Beispiele darthun, dass für denselben Begriff als für ihn charakteristische sehr verschiedene Merkmalgruppen erwählt werden können.

Ein Beispiel zur Erläuterung dieser allgemeinen Bemerkungen: Wir mögen den Kreis (aufgefasst als Kreis*linie*) regelrecht definiren als eine geschlossene, ebene Kurve, deren sämtliche Punkte von einem bestimmten Punkt (etwa ebendieser ihrer Ebene, dem alsdann sogenannten „Mittelpunkte") gleichweit abstehen. [Etwas kürzer gefasst könnte die Definition auch lauten: „Kreis" ist der „geometrische Ort" — d. i. die Gesamtheit der möglichen Lagen — eines („desjenigen") Punktes in einer Ebene, welcher konstanten Abstand hat von einem festen Punkt in dieser Ebene.]

Auf Grund der geometrischen Axiome folgt alsdann denknotwendig der Satz von der Gleichheit aller Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen stehn, im Kreise. Dieser Satz thut aber weiter nichts, als: auf ein weiteres Merkmal, welches allen Kreisen gemeinsam ist, aufmerksam machen, solches konstatiren. Und zwar würde hier sogar sich beweisen lassen, dass dieses Merkmal (wenn auf gewisse Art formulirt) unter allen ebenen Kurven *nur* einem Kreise zukommen kann, weshalb man dasselbe auch benutzen könnte um eine gültige, jedoch von der vorigen gänzlich verschiedene Definition des Kreises aufzustellen.

Ebenso hätten wir aber auch definiren können „Kreis sei eine solche ebene (geschlossene) Kurve zu nennen, welche bei gegebenem oder nicht zu überschreitendem Umfange den grösstmöglichen Flächeninhalt hat. Daraus folgt dann schon logisch allein (wenigstens, falls zugegeben wird, dass der vorigen Definition allemal ein wirklicher Kreis entspricht, ohne Berufung auf weitere geometrische Axiome), dass diese Kurve auch bei gegebenem Flächeninhalt den kleinstmöglichen Umfang haben muss — was folglich ebensogut zu einer Definition des Kreises hätte mitverwendet werden können.

Offenbar sind es Gruppen von zum Teil recht verschiedenen Merkmalen — wir brauchen sie nicht in einzelner Aufzählung zu wiederholen — die in diesen verschiedenen Definitionen als wesentliche Merkmale des Kreises hingestellt wurden. Die einen ziehen aber schon die andern auf Grund der geometrischen Doktrin nach sich.

Den idealen Begriff des Kreises würde jemand erst dann besitzen, wenn alle möglichen für alle Kreise übereinstimmenden Eigenschaften und Relationen (Thätigkeiten fehlen hier) seinem Geiste gegenwärtig wären, in seinem Bewusstsein vereinigt würden. Derselbe müsste darnach alle (unter anderm auch alle geometrischen) Sätze, die überhaupt als von jedem Kreise

gültig ausgesagt werden könnten (auch in Bezug auf seinen Schnitt, seine Berührungen mit andern seinesgleichen sowie mit irgend welchen Kurven und Figuren, auch in Bezug auf Scharen von seinesgleichen, die Kreisschnitte der Flächen etc., nicht zu vergessen seiner Gleichung und analytischen Eigenschaften in *jedem* Koordinatensysteme) schon kennen. Nun lässt sich aber die Möglichkeit nicht leugnen, dass fort und fort neue und allgemeingültige Sätze vom Kreise entdeckt werden. Den idealen Begriff des Kreises besitzt sonach niemand, sondern es ist seine Verwirklichung ein Ziel, auf das die Wissenschaft erst hinarbeitet.

Ein altbekanntes Beispiel, wie man in Bezug auf die Auswahl der als „wesentliche" zur Begriffsbestimmung ausreichenden Merkmale sich versehen kann, liefert Platon's Definition des Menschen als eines zweibeinigen Tiers ohne Federn, welche dessen Schüler Diogenes durch einen gerupften Hahn persiflirte. Bezug sollte bei jener Definition genommen sein auf die anerkannten Thatsachen der Naturgeschichte.

Für einen gegebenen Begriff hat demnach der Ausdruck „die wesentlichen Merkmale" keinen bestimmten Sinn, sofern damit nicht auf eine bereits getroffene Auswahl hingewiesen wird; man kann vielmehr von vornherein nur reden von „einer" Gruppe charakteristischer Merkmale.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass eine Definition (auf extralogischem Gebiete) überhaupt nur *innerhalb des Rahmens einer bestimmten Wissenschaft* eines bestimmten Sinnes teilhaftig sein wird — indem sie eben auf die Grundsätze, Axiome einer solchen stillschweigend Bezug nimmt.

Z. B. durch die oben gegebene Begriffserklärung des Kreises würde dieser Begriff in andrer Weise und *als ein andrer* bestimmt, wenn dabei auf die Axiome etwa einer *nicht*-euklidischen Geometrie Bezug genommen werden sollte — anstatt, wie dies oben stillschweigend geschah — auf die der Euklidischen. Es mag sogar der Fall eintreten, dass verschiedene unter den gleichberechtigt zu nennenden, weil einander gegenseitig bedingenden Definitionen des Kreises dort in der That wesentlich verschiedene Begriffe bestimmen, einander nicht mehr gegenseitig zur Folge haben.

Unter allen Umständen aber stützt und beruft sich die Begriffsbestimmung mittelst Definition ganz unvermeidlich (mit) auf die Gesetze des denknotwendigen Folgerns; *sie setzt die deduktive Logik bereits voraus.*

χ_2) Nun stehen zunächst uns nur diejenigen Begriffe zur Verfügung, die mit den fertigen Gemeinnamen der Sprache verknüpft sind und so uns gegeben erscheinen. Diese mögen jeweils durch beigegebene Erläuterungen von jedem Doppelsinn gereinigt, vor solchem fernerhin bewahrt werden, sodass wir mit ihnen einen unveränderlichen und scharfbestimmten Vorstellungsinhalt (vorbehaltlich dessen durch die

fortschreitende Erkenntniss bedingten Zuwachses) verknüpfen. Zur Aufstellung aller ferneren Begriffe von unbegrenzt allgemeiner Anwendbarkeit steht uns dann, wie gezeigt, nur das Mittel der Definition zur Verfügung, bei dessen Anwendung allemal die Logik schon vorausgesetzt werden musste.

Dieser Umstand legt mir erstmalig eine Bemerkung nahe, für die ich noch anderweitige und ausschlaggebende Gründe in's Feld zu führen haben werde. Schon im Hinblick darauf scheint mir nämlich das Bestreben: die Logik selbst als eine Logik des Begriffs*inhaltes* darzustellen, wie es seit Jahrtausenden vorwiegend zu verwirklichen gesucht worden, ein Hysteron-proteron zu sein; es wird damit, wie mich dünkt, das unterste zu oberst gekehrt, genauer: das oberste zu unterst.

Es würde mir bedauerlich erscheinen, es würde ja zu einem Zirkel nötigen, wenn die Grundgesetze folgerichtigen Denkens sich nicht darlegen liessen, ohne diesen subtilsten und schwierigsten Teil der Logik, wenn man will auch den höchsten, schon vorauszusetzen, als welcher die Lehre von den *Inhalten* der Begriffe (den Endzielen der Wissenschaft überhaupt) scheint hingestellt werden zu müssen.

In der That aber zeigt schon in ihrer bisherigen Entwickelung — wie F. A. Lange[1] pag. 147 hervorhebt — die Logik eine zunehmende Tendenz, von einer Lehre des Inhalts eine solche des *Umfangs* zu werden. Der letztern, deren konsequente Durchführung von diesem scharfsinnigen Autor bislang vermisst wird, weissagt derselbe eine „Zukunft" — mit reicher Entfaltung.

Wir versuchen hier, die Verwirklichung dieser Voraussagung mit anzubahnen. Wenn wir auch die verschiedenen Seiten der Frage noch eingehend beleuchten werden, so sei es doch hier schon ausgesprochen, dass wir die Logik als Lehre von den Urteilen und Schlüssen rein nur als eine *„Logik des Umfanges"* darstellen werden — desgleichen *zunächst* auch die Lehre von den Begriffen. Damit glauben wir auch den *leichtesten* Weg einzuschlagen, auf welchem sich mit gegebenen Kräften am weitesten wird kommen lassen.

ψ_2) Auch das individuelle oder *Einzelding* wird als „Begriff" mit zugelassen; es ist der Komplex aller seiner Merkmale, durch deren eigenartige Verbindung miteinander es sich von allen andern Objekten des Denkens unterscheidet und so als ein vollkommen bestimmtes sich darstellt. In ihm und mit ihm selbst fällt Inhalt und Umfang seines Begriffes in eins zusammen.

Durch diese Einziehung des Einzeldinges unter die (bisher nur als *„allgemeine"* betrachteten) „Begriffe" erweitern wir die Auffassung, die wir mit dem Worte „Begriff" verbinden. Wir geben damit kund, dass uns als das Charakteristische beim Begriffe (als das Wesen vom Begriff des Begriffes) nur eben das erscheint, dass unter seinem Namen

eine *bestimmte von allen andern unterscheidbare Merkmalgruppe*, ein bestimmter Vorstellungsgehalt*) — in eigenartiger Verknüpfung**) — zusammengefasst und in unabänderlich *konstanter* Weise diesem Namen zugeordnet werde.

Mit Sigwart (l. c.) betrachten wir als „das Ziel der Begriffsbildung im logischen Sinne eine für alle Denkenden gleiche *Ordnung ihres mannigfaltigen Vorstellungsgehaltes* und damit die allseitige planmässige Vollendung dessen, was die Sprache überall schon mit unbewusster Vernunft begonnen hat".

In und mit dem Begriff wird in der That *verglichen:* es wird Übereinstimmendes zusammengefasst und Nichtübereinstimmendes auseinandergehalten. Und die Wahrnehmung aller Verschiedenheiten sowie die aller Übereinstimmungen (auch nach der Seite der Relationen, wie Grund und Folge, Ursache und Wirkung) wird die Erkenntniss des Weltganzen zusammensetzen.

Die Wissenschaft aber geht darauf aus, nicht nur logisch vollkommene, sondern auch die *zweckmässigsten* Begriffe zu gewinnen, mit Hülfe deren und ihrer Bezeichnung die grösstmögliche Einfachheit und Abkürzung unsres Wissens zu erreichen ist und die wertvollsten und umfassendsten allgemeinen Urteile ermöglicht werden. (Vergl. Sigwart[1] p. 272 u. 273.)

ω_2) Kehren wir nochmals zu unsrer Betrachtung der Definition zurück. Bei der Erklärung eines Begriffs mittelst Definition konnte es sich nicht um die Angabe eines *einzigen* Merkmals als des „wesentlichen" handeln. Es müsste sonst das zu Erklärende mit Demjenigen, wodurch es erklärt werden soll, sich dem idealen Vorstellungsgehalte nach schon von vornherein decken und würde ein völlig identisches Urteil resultiren, wie z. B. „Weiss heisst etwas Weisses", „Wahrheit ist, was wahr ist"; es könnte höchstens die Erläuterung des Sinns eines Wortes vermittelst eines damit synonymen vorliegen, wie etwa

*) Ich glaube mich darin in Übereinstimmung mit Sigwart zu befinden — vergl.[1] pag. 270. Doch möchte ich, im Hinblick auf das Unvollendetbleiben der Begriffe nach der Seite ihres idealen Inhaltes, seiner Forderung der *„festen Begrenzung"* die obige der *Bestimmtheit* vorziehen.

**) Dieser Zusatz ist eigentlich überflüssig, indem die Art und Weise, wie Merkmale miteinander verknüpft auftreten, selbst schon unter die Merkmale eingerechnet werden mag. Die *„sichere Unterscheidung"* eines Begriffs von allen andern wird notwendig mit ihm selbst gegeben sein, sobald nur sein Inhalt hinreichend entwickelt.

„Rotation ist eine Drehung", „Zweifel ist Ungewisssein" und dergl. — was aber niemand als eine Definition gelten lässt.

Als charakteristisch kann immer nur eine Mehrheit, Gruppe, *ein System* von (allermindestens zwei) angebbaren *Merkmalen* in Betracht kommen — welche dem Begriffsinhalte angehören, in ihm enthalten sind.

Würde eines von diesen Merkmalen durch die übrigen von selbst bedingt" (in dem schon erläuterten Sinne), so wäre seine Anführung überflüssig; dasselbe ist dann aus der Definition — behufs deren Vereinfachung — fortzulassen; dann sind ja schon die übrigen Merkmale zur Bestimmung des Begriffes ausreichend.

Jedes von diesen Merkmalen wird nun aber, ausser in dem zu definirenden, auch noch selbständig oder in andern Begriffen auftreten, denn wenn ein solches jenem *ausschliesslich* angehörte, so würde es allein schon für den zu definirenden Begriff charakteristisch sein, zur Bestimmung desselben ausreichen; die Angabe der übrigen Merkmale könnte alsdann unterbleiben und kämen wir auf den oben schon als ausgeschlossen erkannten Fall zurück.

Die in der Definition je als „wesentliche" verwendeten Merkmale müssen also, je für sich, gleichwie einen *„engeren"* Inhalt, so einen *„weiteren"* Umfang haben; sie werden dem zu definirenden *„übergeordnete"* oder mit ihm verglichen *„höhere"* Begriffe sein.

Von diesen Begriffen oder wesentlichen Einzelmerkmalen pflegt man irgend einen — gewöhnlich den durch ein Substantiv dargestellten — als *„genus proximum"*, d. i. als die dem zu definirenden („Art"-) Begriffe *nächst übergeordnete „Gattung"* zu bezeichnen, und sagt von dieser, dass sie durch die noch ferner hinzutretenden Merkmale eingeschränkt, noch näher bestimmt, *„determinirt"* werde.

Jedes neu hinzutretende Merkmal muss in der That, gleichwie es den faktischen durch die bisherigen Merkmale ausgedrückten Vorstellungs*inhalt vermehrt*, so auch den (möglichen) *Umfang* des von letzterm bestimmten Begriffes wirklich *verringern*, ansonst es ja von diesen bereits thatsächlich mitbedingt sein und darum seine Erwähnung überflüssig erscheinen würde.

Diese in der Definition zu dem genus proximum noch hinzutretenden Merkmale werden demgemäss als *„differentiae specificae"* bezeichnet, weil sich durch ihren Komplex, sowie auch schon durch jedes einzelne von ihnen der zu definirende Begriff als eine Unterart des genus proximum von andern Arten dieser Gattung spezifisch unterscheidet.

So erscheint bei unsrer (ersten) Definition des Kreises der Begriff „Kurve" (oder Linie) als nächst übergeordnete Gattung. Dieser ist von weiterem Umfange und dürftigerem Inhalte als der Begriff „Kreis" selbst. Der Kreis erscheint als eine „Art" unter der „Gattung" der Kurven. Als spezifische Unterschiede treten in unsrer Definition drei Merkmale zu dem Begriff der Kurve hinzu, nämlich das Merkmal „geschlossen" zu sein, „eben" zu sein und „gleichen Abstand ihrer Punkte vom Mittelpunkte zu haben".

Liessen wir das erste fort, so würde die Definition auch jeden Kreisbogen umfassen (resp. als einen „Kreis" hinstellen), ja — bei hinreichend allgemeiner Fassung des Begriffs „Kurve" — auch jedes System von Bögen und vielleicht isolirten Punkten *derselben* Kreislinie.

Durch Weglassung auch des zweiten Merkmals der Ebenheit bekämen wir einen Begriff, unter dessen Umfang ausser den Kreisen und Kreisbögen auch jeder Linienzug auf einer Kugelfläche fallen würde — der auf einer starre Kugel (als mathematische Linie) geschriebene Namenszug des geübten Lesers zum Beispiel. Etc.

Was Kurve, was eben, was geschlossen ist, was gleichen Abstand seiner Punkte von einem nämlichen Punkte hat, das sind lauter höhere oder dem des Kreises übergeordnete Begriffe.

Wenn sonach die Definition eines Begriffes nur vermittelst anderer, demselben übergeordneter oder höherer Begriffe geleistet zu werden vermag, so wird man bei fortgesetzter Bestimmung auch dieser und der folgenden Begriffe mittelst Definition schliesslich bei solchen Begriffen anlangen und innehalten müssen, welche als die allgemeinsten, dem Umfange nach weitesten oder höchsten, einer Definition nicht weiter fähig sind, da sich zu ihnen höhere Begriffe (ausser dem einen allumfassenden des „*Etwas*") nicht mehr angeben lassen (resp. im Begriffsvorrat der Sprache nicht vorfinden).

Solche selbst nicht definirbare, aber zur Definition anderer verwendbare Begriffe nennt man „*Urbegriffe*" oder „*Kategorieen*". Dieselben werden dann einfach als von Anfang bekannt, nämlich mit der Sprache selbst gegeben vorauszusetzen sein.

Welches sind nun aber jene Kategorieen, die zum Aufbau aller andern Begriffe ausreichen würden?

Ein erster — nach der zutreffenden Kritik von Mill und Andern noch ziemlich misslungener — Versuch zur Aufstellung einer Kategorieentafel ist bekanntlich von Aristoteles gemacht. Auch haben Kant, Mill selbst, Peirce[1c], Sigwart und Andere schon bessere Vorschläge für das ganze Gebiet oder für einzelne Teilgebiete des Denkens zu machen gewagt. Ich hoffe einleuchtend zu machen, dass und warum derartige Versuche als verfrühte zur Zeit noch nicht zum Ziele führen können.

α_3) Immerhin ist uns mit Obigem das Ideal erwachsen, unser gesamtes Begriffssystem zu einem wissenschaftlich streng gegliederten zu gestalten, indem wir die Begriffe alle aus möglichst wenigen *Ur-* oder *Grundbegriffen* vermittelst möglichst weniger *Grundoperationen* (zu denen die Determination gehören wird) systematisch aufbauen. [Die Begriffe dieser Operationen werden selbst zum Teil den Urbegriffen in gewissem Sinne zuzuzählen sein].

Nachdem erkannt ist, wie viel der menschliche Geist dem Zeichen verdankt, dürfen wir die Möglichkeit nicht ungenutzt lassen, das Zeichen noch weiter auszubilden. Es bietet sich die Aufgabe dar, durch angemessene, adäquate Gestaltung des Zeichens Zeichen und Sache durchweg in gesetzmässiges Entsprechen zu bringen, oder (mit den Worten Trendelenburg's) die Gestaltung des Zeichens und den Inhalt des Begriffs in unmittelbare Berührung zu bringen, indem wir statt des in der Sprache gerade vorhandenen Wortes solche Zeichen ersinnen, welche die im Begriff unterschiedenen und zusammengefassten Merkmale unterscheidend und zusammenfassend darstellen.

Auf einzelnen Gebieten hat die Wissenschaft aus eigenem Bedürfniss schon Anfänge einer solchen Begriffsschrift hervorgebracht. Das Verfahren, durch welches mit unsern Ziffern die nach dem zehnteiligen Gesetz fortschreitende Zahlenbildung ausgedrückt wird (vergl. ζ_2), ist ein hervorragendes Beispiel dazu, an welchem es sich (in der Arithmetik und höheren Rechnung) deutlich zeigt, wie mit dem zutreffenden Zeichen die Herrschaft über die Sache, die Einsicht und Kunst des Menschen in unübersehbarer Wirkung zunimmt. Mit dem „notwendigen", d. h. gemäss der Forderung höchster Angemessenheit als solches sich aufdrängenden Zeichen muss sich die Erkenntniss der bezeichneten Gebiete notwendig weiter und weiter erschliessen.

Eine solche Bezeichnung wird, wenn sie auf das *ganze* Feld der Gegenstände des Denkens ausgedehnt zu werden vermag, im Gegensatz gegen das dem Inhalte der Vorstellungen mehr oder weniger gleichgültige Zeichen des Wortes, eine *charakteristische Sprache* der Begriffe, „*Begriffsschrift*", und im Gegensatz gegen die besonderen Sprachen der Völker eine *allgemeine* Sprache der Sache *(Pasigraphie)* sein (ibid.). Hiermit sind wir angelangt bei dem Gedanken einer philosophisch wissenschaftlichen *Universalsprache.*

Derselbe war zuerst von Des Cartes erfasst, dann von Leibniz vertieft; doch blieben die beiderseits gemachten Vorschläge mehr Umriss und Versprechen, als Ausführung und Leistung. Ich folge mit den hierauf bezüglichen Bemerkungen wieder Trendelenburg (l. c.). Cartesius (Epistolae I, 111 in der Amsterdamer Ausgabe von 1682, p. 353 sqq.) verlangt, dass eine ähnliche Ordnung unter den Ideen, welche möglich sind, her-

gestellt werde, wie es eine natürliche Ordnung unter den Zahlen gibt. Und wie jemand in einem Tage lernen kann, in einer unbekannten Sprache alle Zahlen in's unendliche zu benennen und zu schreiben, obwol sie mit unzähligen verschiedenen Wörtern bezeichnet werden, so könne ähnliches mit den übrigen zum Ausdruck der menschlichen Gedanken notwendigen Wörtern geschehen. Die Erfindung einer solchen Sprache hänge von der wahren Philosophie ab*); denn ohne diese sei es unmöglich, alle Ideen der Menschen aufzuzählen oder zu ordnen und so zu unterscheiden, dass sie deutlich und einfach wären. Erst wenn man deutlich entwickelt hätte, welches die einfachen Vorstellungen, und aus welchen Elementen die Gedanken zusammengesetzt sind, und wenn dies in der Welt anerkannt worden: so lasse sich eine allgemeine Sprache hoffen, welche leicht zu lernen, aussprechen und zu schreiben wäre und welche überdies, was die Haupt-, unsre Urteilskraft fördern würde, indem sie alles so deutlich und erschieden darstellte, dass eine Täuschung unmöglich würde, während ngekehrt unsre Wörter nur verworrene Bedeutungen haben, an welche ch der menschliche Geist so lange Zeit gewöhnt hat, dass er fast nichts vollkommen einsehe. Cartesius setzt hinzu, dass er eine solche Sprache und die Wissenschaft*), von welcher sie abhängt, für möglich halte; mit ihrer Hülfe werde dann ein Bauer über die Wahrheit der Dinge besser urteilen, als jetzt ein Philosoph. Aber man solle nicht hoffen, sie je zu erleben, denn das setze grosse Veränderungen voraus und es sei dazu notwendig, dass sich die Welt in's Paradies verwandle.

Leibniz indessen hatte kühneren Mut, obwol er die vorangegangenen Versuche*) und ihr Vergebliches kennt.

Des Letztern (nicht von ihm herausgegebenen) Aufsätze über die Pasigraphie sind betitelt: historia et commendatio linguae characteristicae universalis quae simul sit ars inveniendi et judicandi, desgl. dialogus de connexione inter res et verba et veritatis realitate (1677).

Schon die Namen, welche Leibniz dem Unternehmen gibt, kündigen seine Bedeutung an. Bald nennt er es *lingua characteristica universalis*

*) Man sieht hier schon den grossen Unterschied, welcher besteht zwischen dem *logischen* Ideal der „Pasigraphie" und dem linguistischen einer „Weltsprache", wie es heutzutage die Volapükisten anstreben. Gleichwie die Letzteren es thun, so bezweckten auch die erwähnten vorangegangenen Versuche blos, eine Verständigung zu erzielen zwischen Solchen, die in der Sprache einander fremd sind. Durch die allerdings nicht gering anzuschlagende Beseitigung aller Unregelmässigkeiten vereinfachen sie zwar erheblich die Grammatik, übernehmen aber ohne weiteres fast alle sonstigen logischen Unvollkommenheiten unsrer faktischen Kultursprachen, schliessen an diese sich als an etwas schlechthin Gegebenes an.

Solcher vorgängigen Versuche führt schon Trendelenburg uns eine ziemliche Anzahl (beiläufig fünfe, von Kircher, Becher, Dalgarn, Wilkins und Trede) an. Das ohne Jahreszahl, Druckort und Namen des Verfassers unter dem Titel: „Vorschläge einer notwendigen Sprachlehre" um 1811 erschienene Werk von Ludwig Benedikt Trede, welches den Grundgedanken des Volapük schon vollständig (indess wol weniger einfach) in seiner Art verwirklicht, konnte ich von der Königlichen Bibliothek zu Berlin entleihen. Einer noch umfassenderen

oder das *Alphabet der menschlichen Gedanken,* bald hingegen *calculus philosophicus* oder *calculus ratiocinator.* [In jenem Briefe vom Jahre 1714 nennt er es *spécieuse générale* — ein Name, welcher an die Verwandtschaft mit der geometrischen Analysis erinnert, da diese, seit Vieta Buchstaben als *allgemeine* Zeichen von Grössen in sie einführte, *analysis speciosa* hiess.] Diese Namen zeigten schon das Ziel, das Leibniz vor Augen hatte: es war eine adäquate und allgemeine Bezeichnung des Wesens der Begriffe durch eine solche Zergliederung in ihre Elemente, dass dadurch eine Behandlung derselben durch Rechnung möglich werden sollte; sein Unternehmen, sagt Leibniz, müsse zustande kommen *characteribus et calculo* als eine *combinatoria characteristica.*

Von den Prinzipien her hofft er Befestigung der Erkenntniss, Verhütung des Widerspruchs, Ausschluss des Streites (man werde, wo solcher droht, einfach sagen: Lasst uns friedlich die Sache berechnen!). Leibniz erwartet einen Einblick und eine Übersicht, durch welche mitten in der sich ausdehnenden Masse der Erkenntniss dennoch die Wissenschaften sich abkürzen, und insbesondere hofft er durch die Einsicht in die einfachen Elemente und deren Verbindungsweisen auch fortschreitende Erkenntniss des Besonderen, Entdeckungen und Erfindungen.

Die Verwirklichung des gedachten Ideals einer wissenschaftlichen Klassifikation und systematischen Bezeichnung alles Benennbaren muss aber nach dem oben von uns Angeführten zur Voraussetzung haben: die vollendete Kenntniss der die Begriffselemente zu verknüpfen bestimmten Grund*operationen* und die Bekanntschaft mit deren Gesetzen. Diese Vorarbeit hat die Logik zu leisten, und solange sie — wie dermalen — unvollendet ist, können Versuche erwähnter Art von Erfolg nicht gekrönt sein.

Vorher schon Kategorieentafeln aufzustellen scheint mir kaum verdienstlicher, als der Hinweis auf einen Haufen Steine als auf die Bausteine zu einem wundervollen Baue, dessen Plan jedoch noch niemand gesehen hat, und bei welchem auch das Bindemittel, der Kitt zum Zusammenhalten der Steine, vergessen ist.

Jene die Begriffe verknüpfenden Operationen werden wir hier in der That erst zu studiren haben.

Und ihre Gesetze werden wir in bestimmten Grenzen vollständig erforschen, aber allerdings zunächst nur für die elementarsten Ver-

Reihe derartiger Versuche gedenkt Herr Guntram Schultheiss in einem Aufsatze über „Künstliche und natürliche Weltsprachen" in Westermann's Monatsheften vom Sept. 1886, p. 796 .. 807.

Des Raimundus Lullius „Summulae logicales" war hierbei nicht Erwähnung zu thun. — Dass Herrn Frege's „Begriffsschrift"[1] diesen ihren Namen nicht verdient, sondern etwa als eine in der That logische (wenn auch nicht zweckmässigste) Urteilsschrift zu bezeichnen wäre, glaube ich in meiner Rezension[4] dargethan zu haben.

richtungen des Denkens, wie sie als solche sich darbieten. Dieser erste Teil der Logik ist der *Klassenkalkul* — von Peirce als die Logik der Dinge hingestellt, welchen *„absolute“* Namen zukommen (vergl. ξ_2).

An die schwankenden Gebräuche der Wortsprache werden wir dabei den Maasstab eines vollkommen konsequenten Bezeichnungssystems anlegen. Mit letzterem werden wir dann auch im stande sein, die Verknüpfungen und Beziehungen, die zwischen *Urteilen* möglich sind, erschöpfend wiederzugeben, sodass als ein zweiter Teil der Logik der *Aussagenkalkul* erscheint, der sich zu einem hohen Grade von Vollendung bereits entwickelt zeigt.

Erst mit dem völligen Ausbau eines dritten (und schwierigsten) Teiles könnte aber die Disziplin der Logik den Anspruch erheben die obenerwähnte Vorarbeit für die dereinstige wahre Philosophie geleistet zu haben. Das wäre die Logik der unter „relativem“ Namen zu begreifenden Gedankendinge: die Logik der *Beziehungen* überhaupt und ihrer verschiedenen Kategorieen. Diesen Teil unsrer Disziplin müssen wir dermalen grossenteils noch unfertig lassen.

β_3) Wir haben von π_2) ab versucht, den Begriff des „Begriffes“ zu entwickeln.

In einer so fundamentalen Frage, über welche die Philosophen schon seit Jahrtausenden geschrieben und wo deren Lehrmeinungen so himmelweit auseinandergehen, scheint nun aber doch ein kritischer Rückblick noch angezeigt zu sein.

Wir gingen bei unsrer Betrachtung von dem für den Begriff (als Einzelding oder aber allgemeinen Begriff) bereits vorhanden gedachten *Namen* (Eigennamen resp. Gemeinnamen) aus.

Die Annahme, dass der fragliche Begriff einen Namen *habe*, kann nicht wol als eine Beschränkung für die Allgemeinheit unsrer Betrachtungen angesehen werden, wofern nur nicht etwa gefordert wird, dass der Name von Anfang bereits unter den einwörterigen figurire. Denn was auch Gegenstand des Denkens werden mag, es lässt sich doch mit Worten angeben, beschreiben. Und diese Beschreibung stellt uns einen (eventuell eben vielwörterigen) Namen für das Beschriebene vor. So oft wir übrigens einen neuen Begriff gewinnen, empfinden wir alsbald das Bedürfniss nach einem angemessenen (auch angemessen kurzen) Namen für denselben, und diesem Bedürfniss könnte nötigenfalls selbst durch einen einwörterigen Namen — mittelst Einführung eines solchen — immer genügt werden.

Es sollte jedenfalls mit unsrer Erörterung nicht behauptet sein, dass die Bildung des Worts dem Begriffe notwendig oder thatsächlich *voran*gehe.

Wenigstens die Aneignung des Wortes vonseiten des jugendlichen Menschen bei der Erlernung seiner Muttersprache mag in der That nicht selten derjenigen des zugeordneten Begriffes voraufgehen. Auch vermöchte die Wissenschaft wol Beispiele aufzuweisen, wo die Kombination von Worten — z. B. in der Form als „Nicht-*a*“, nachdem ein Begriff von *a* bereits vorgelegen — den ersten Anstoss zur Bildung eines Begriffes gab.

Jedoch lassen auch Belege sich erbringen für Fälle, wo die umgekehrte Succession erkennbar ist. Auf p. 177 seiner Schrift[1] erinnert J. Keller an das von Steinthal erwähnte Kind, das jedesmal, wenn es einen Fremden mit Papa anredete, den Kopf dazu schüttelte. „Es befand sich auf dem Stadium seiner Begriffsentwickelung, wo der allgemeine Begriff *Mann*, den es mit dem Worte Papa verband, sich zu spalten anfing in *Mann im allgemeinen* und in den Begriff, den Kinder späterhin mit *Papa* verbinden.“ Wie in diesem Falle, so dürfte auch bei dem Zuwachs an Begriffen, den die Wissenschaften liefern, die geistige Erfassung des Begriffes der wortbildenden Namengebung zumeist vorangehen.

Die ganze Frage mögen wir indess der Psychologie, Sprachwissenschaft und Pädagogik überlassen.

Worauf wir hier sicher fussen zu dürfen glaubten, ist nur: dass die Begriffsbildung mit der Namengebung, der Schöpfung und Fortentwickelung der Sprache, notwendig handinhand geht.

γ_3) Schwerlich dürfte unsre Darlegung beanstandet, sie möchte wol als zutreffend zugestanden werden in Bezug auf die sogenannten „empirischen“ Begriffe.

Begriffe, die ihren Ursprung der Wahrnehmung, *Erfahrung* verdanken, entstehn zweifellos auf die angegebene Weise. Und zwar braucht die Wahrnehmung nicht gerade eine sog. „äussere“ zu sein, die auf dem Sinneseindruck beruht.*) Auch durch „innere“ Wahrnehmung und Erfahrung gewinnen wir Begriffe in ganz analoger Weise. So mögen wir bei der Farbe und dem Ton auf das gemeinsame Merkmal des „Sinneseindrucks“ reflektiren**), wir mögen von den Phantasiegebilden, Absichten, Stimmungen und Gedanken das Merkmal der „Unsinnlichkeit“ abstrahiren.

*) Vergl. γ) Fussnote. Auch diese „äussere“ Wahrnehmung läuft übrigens wesentlich auf eine „innere“ hinaus, indem es nicht das Auge ist, das sieht, sondern der Geist, das *Ich*, in dessen Bewusstsein die Sinnesbotschaft aufgenommen wird.

**) Mit Absicht führe ich dies Beispiel an, um auf die Unhaltbarkeit und Willkür hinzuweisen, welche in der üblichen Erklärung „disparater“ Begriffe liegt.

Eine andere Frage ist indess, ob wirklich *alle* Begriffe *so*, durch Reflexion auf die gemeinsamen Merkmale, in's Dasein treten und treten müssen.

Neben dem geschilderten Prozesse der „unmittelbaren" Begriffsbildung scheint mir in der That eine Möglichkeit auch „mittelbarer" konstruktiver Bildung von Begriffen zugestanden werden zu müssen.

Der Begriff der „Unmöglichkeit" z. B. (den auch Keller hervorhebt) ist sicher nicht empirisch durch Reflexion auf die gemeinsamen Merkmale von allem „Unmöglichen" entstanden, weil solches überhaupt nicht Gegenstand einer Erfahrung werden konnte. Allerdings hegt auch dieser Begriff eine Mannigfaltigkeit von Vorstellungsverbindungen und Gedanken ein, und grenzt sie gegen die übrigen ab, denen wir aus logischen oder (solchen und) physikalischen Gründen die „Möglichkeit" zusprechen. Und es wäre noch immerhin denkbar, dass auch hier durch Reflexion auf ein gemeinsames Merkmal an eben jenen Gedankendingen der Begriff entstanden wäre, in Anbetracht, dass „Unmöglichkeit" ja in der That nicht von Dingen der Aussenwelt, sondern nur von einer Kombination von Erkenntnisselementen in unserm Geiste prädizirt werden kann.

Ob solches aber die wirkliche und notwendige Entstehung des Begriffs der „Unmöglichkeit" darstellt, scheint eine schwierige Frage zu sein.

Zuzugeben ist wol, dass wir in Gestalt der „*Verknüpfung*" (Kombination) und „*Trennung*" (Separation) und — als eine Modifikation der letztern — insbesondre in Form der „Verneinung" (Negation), von durch Abstraktion gewonnenen Vorstellungselementen oder Merkmalen auch das Vermögen besitzen, Begriffe mittelbar zu konstruiren, sodass Reflexion und Abstraktion nicht als die einzigen Quellen der Begriffsentwickelung hingestellt werden dürfen.

Auch die Begriffe des „Dings an sich" und der „Wahrheit", der „Vollkommenheit", des „Ideals", der „Freiheit", und andere, könnten ähnlich dem vorausgeschickten Beispiel verwendet werden, solche Bemerkung anzuregen.

Die angeführten Beispiele genügen wol, um auf die Schwierigkeiten einer *allgemeinen* Theorie der Begriffsbildung und der Erklärung seines Wesens hinzuweisen.

Ungeachtet der mehrtausendjährigen Arbeit sind über eine solche die Philosophen auch noch nicht einig geworden.

Es befehden sich die Schulen der „Nominalisten", der „Realisten" und der „Konzeptualisten" und wenn auch ziemlich unverkennbar geworden ist, dass jene erstern mit der Einseitigkeit ihrer Auffassung sich nicht im Rechte befinden, so können wir uns doch auch auf eine allgemein anerkannte Theorie noch nicht berufen.

Ebenso gehen die Ansichten noch weit auseinander über das Wesen der „*allgemeinen Vorstellung*" (repraesentatio generalis sive universalis) als

Desjenigen, was darunter vorgestellt wird, wenn der Name einer Klasse fällt, z. B. wenn von „einem Baume" gesprochen wird — im Gegensatz zu der Einzelvorstellung (repraesentatio singularis, wie „*dieser* Baum hier") und im etwaigen Gegensatz zum Begriff „Baum". Die Identität solcher Allgemeinvorstellung mit dem zugehörigen Begriffe wird teils behauptet, teils bestritten.

Auf solchem unsichern und vielumstrittenen Fundamente nun das Gebäude einer Wissenschaft errichten zu wollen, die, wie die Logik, den Anspruch erhebt, nur absolut sichere, weil denknotwendige und evidente Wahrheiten aufzustellen, scheint mir kein wissenschaftliches Verfahren. Die Logik von vornherein als eine solche des Begriffs*inhaltes* zu errichten möchte eher wol dem Versuche gleichen, das Dach vor dem Hause zu bauen.

Eine „*Logik des Umfanges*" in erster Linie anzustreben, darin bestärkt mich auch die Überlegung: dass (gerade wenigstens *von dem Standpunkte, den manche Verfechter* einer solchen „*des Inhaltes*" einnehmen) viele Begriffe *dem Inhalte nach überhaupt nicht existiren*, die gleichwol eines (begrifflich!) scharfumgrenzten Umfanges sich erfreuen.

So die meisten ursprünglich durch Negation gewonnenen Begriffe, wie etwa „*Nichtmensch*" — indem es, wie Lotze witzig bemerkt, für den menschlichen Geist eine ewig unlösbare Aufgabe bleibt, von allem, was nicht ein Mensch ist, also „*von Dreieck, Wehmut und Schwefelsäure*" die gemeinsamen Merkmale zu abstrahiren und zum Begriff des „Nicht-menschen" zusammenzufassen!

Dem Umfange nach existirt aber dieser Begriff doch unzweifelhaft (wenn man auch mit Lotze gegen die Zweckmässigkeit und den wissenschaftlichen Wert seiner Aufstellung zu Felde ziehen mag), sintemal kein individuelles Objekt des Denkens bekannt ist, über welches wir irgend im Zweifel sein könnten, ob demselben das Prädikat, ein „Mensch" zu sein, zu oder abzusprechen wäre — vorausgesetzt nur, dass man sich über gewisse Fragen des Doppelsinns, z. B. den Embryo, den Leichnam betreffend, geeinigt, nämlich den Begriff „Mensch" selbst erst gehörig präzisirt hat.

Und die Lotze'sche Argumentation[1] pag. 58 würde mutatis mutandis ebensogut auf „*einander nicht schneidende Kurven*" anwendbar sein, wo seine sonstigen Einwendungen wegfielen. Auch hier würde es wol unmöglich sein, ein „positives" gemeinsames Merkmal zu abstrahiren. Ein „negatives" aber, genauer: die Abwesenheit eines bestimmten (anerkannten) Merkmals, will Lotze eben nicht als Merkmal gelten lassen. Vergl. hiezu § 16.

Von seinem Standpunkte aus, auf den ich mich soeben stellte, um ihn mit seinen eigenen Gründen zu widerlegen, hätte also auch dieser letztere Begriff keinen Inhalt und existirte doch unzweifelhaft seinem Umfange nach, als Klasse; und als solcher wäre er auch (schlechthin oder in anderweitig noch enger begrenzter Auffassung) für die Geometrie ganz unentbehrlich.

Von einer Logik des Inhaltes müssten (darnach also) ganz unentbehrliche Begriffe ausgeschlossen bleiben und hätte solche keinen

Anspruch darauf, mit ihren Gesetzen unser ganzes Denken zu umfassen, oder die erforderliche Allgemeinheit zu besitzen.

Übrigens steht es auch gar nicht so schlimm um die Einseitigkeit eines Studiums der blossen Begriffsumfänge (ohne Rücksicht auf den Inhalt der zugehörigen Begriffe) — aus dem Grunde, weil sich zeigen wird, dass bestimmten Umfangs*verhältnissen* der Begriffe (wo solche vorhanden) allemal die „umgekehrten" Verhältnisse zwischen ihren Inhalten parallel gehen, z. B. einer Überordnung hier eine Unterordnung dort.

Es wird also das eine zwar unbehelligt vom andern dennoch grossenteils zugleich mit ihm erledigt. Und die Frage: ob Logik des Inhalts oder des Umfangs? müsste darnach sogar für irrelevant erklärt werden, hätte sich nicht jene durch die Anforderung, u. a. immer nur *begrifflich* bestimmte Subjektklassen zu bilden, ganz übermässig eingeschränkt gesehen, und wäre sie nicht in Reaktion gegen solche Einengung notgedrungen allemal über ihre Grenzen hinaus getreten, und — inkonsequent geworden! [Konsequenterweise könnte z. B. die Logik des Inhalts partikulare Urteile überhaupt nicht bilden — es sei denn als identische oder „nichtssagende" Urteile — vergl. die Ausführungen am Schlusse des § 44.]

Was eine „Klasse" ist, scheint auch viel leichter zu begreifen, als der Komplex der psychologischen Motive, welche zu ihrer Aufstellung Veranlassung bieten könnten. Stellte man letztere, d. i. eben den „Inhalt" des zugeordneten Begriffes (falls anerkannt werden mag, dass es einen solchen gibt) in den Vordergrund der Betrachtung und begänne, dergleichen Motive selbst aufzuzählen, so vermöchte niemand vorab zu ersehen, ob nicht die Wissenschaft noch ganz andere Motive zur Klassenbildung dereinst aufdrängen wird, als diejenigen sind, die man heutzutage als einen regelrechten Begriff konstituirend gelten lassen will. Wie schon unter v_2) angedeutet und in Einstimmung mit Dedekind[1] pag. 2, Fussnote können wir es nicht als berechtigt anerkennen, dass man der Freiheit der Begriffsbildung irgend welche Schranken von vornherein auferlege.

Gerade indem sie die Klasse als eine möglicherweise auch ganz willkürlich zusammengesetzte — um nicht zu sagen „zusammengewürfelte" — in's Auge fasst, wird die Logik der *Klassen*, unter denen von selbst auch die Umfänge aller Begriffe mit figuriren, eine wesentlich höhere Allgemeinheit erzielen als jede Logik, welche von vornherein nur von den Inhalten der Begriffe handeln will.

Das letzte Wort über die Frage dürfte der *Erfolg* zu sprechen

haben; und hier scheinen mir zunächst die jahrtausendlangen Bemühungen, von der Betrachtung des Begriffs*inhaltes* aus die Logik in ein gesund fortschreitendes Wachstum zu bringen, gescheitert.

Schlagender dürfte dies kaum zu konstatiren sein, als es von einem der heftigsten Gegner der Umfangslogik selbst geschieht, nämlich von Prantl, indem dieser in der Vorrede zum 4ten Bande seines Riesenwerkes[1] als den Hauptgewinn seiner eingehenden Studien über die Logik-Erzeugnisse von mehrern der neueren und neuesten Jahrhunderte mit drastischen Worten den hinstellt, dass Andere all' den Wust nun nicht mehr durchzulesen brauchen! Sollte da die Disziplin nicht fortgesetzt doch auf dem Holzwege gewesen sein?

δ_3) Ich möchte hiernächst noch einem Vorurteile entgegentreten, welches der Aufstellung einer „Logik des Umfanges" entgegensteht.

Es ist besonders in Deutschland bei geistreichen Philosophen Mode geworden — und neuerdings in verstärktem Maasse*) — die Versinnlichung von Begriffsumfängen durch die Euler'schen Kreise (vergl. § 3) eine *dürre* oder *öde* zu nennen, überhaupt von der Betrachtung der Umfangsverhältnisse als von etwas *Trockenem*, *Langweiligen* oder *Unfruchtbaren* mit einer gewissen Geringschätzung zu sprechen, und vollends einen auf diese Betrachtung gegründeten *Kalkul* als einen *toten Formalismus* oder *leeren Schematismus* zu qualifiziren, solchen von vornherein zu verdammen.

Die Frage, ob dem wirklich so ist, scheint mir von ganz kapitaler Bedeutung zu sein und es besonders im Interesse der *deutschen* Philosophie zu liegen, dass derselben auf den Grund gegangen werde.

Bei dem Versuche, dies zu thun, wende ich mich nicht an Diejenigen, die (vielleicht mehr oder minder bewusst) solche Äusserungen im Grunde blos als einen Deckmantel, eine scheinbare Rechtfertigung für ihre Bequemlichkeit benutzen, zufolge deren sie die Mühe scheuen, welche es unvermeidlich kostet, in den Geist einer konsequent aufgebauten, exakten Wissenschaft einzudringen, die Herrschaft über einen Kalkul sich zu erringen. Diese würden, weil ihnen die Überzeugung unwillkommen, auch schwerlich zu überzeugen sein.

Denjenigen aber, die unbeeinflusst von solch' persönlichem Motive aufrichtig meinen, dass die Sache sich also verhalte, möchte ich folgende Betrachtung nahe legen.

Bringen wir uns einmal zum Bewusstsein, was denn eigentlich

*) Es würden sich eine Menge Citate beibringen lassen; ich halte mich aber durch das „nomina sunt odiosa" gerechtfertigt, wenn ich möglichst davon abstehe, solche Beispiele anzuführen, die vielleicht als eine persönliche Invektive aufgefasst werden könnten.

Selbstverständlich indess sind zu obigem auch erfreuliche Ausnahmen zu konstatiren.

vor sich geht beim *Zählen* (der Einheiten einer Menge). — Wenn ich z. B. die Herrn, die hier auf einer Bank vor mir sitzen, zähle, so *bilde* ich *einen jeden* derselben einfach *mit einem Striche* (1) *ab*. Damit das entstandene Bild — sagen wir 11111 — nicht als eilftausendeinhunderteilf gelesen werde, verbinde ich die Striche (Einer) mit dem Zeichen plus. Ich erhalte so ein Schema:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

und ist es für die Zwecke unsrer Betrachtung nebensächlich, dass für dasselbe auch ein einfacheres Zeichen: 5, nebst zugehörigem Namen eingeführt ist.

Im Grunde ist es also eine *äusserst rohe* Art von *Abbildung*, die wir beim Zählen vornehmen (die Abbildung der Einheiten oder Individuen der Menge blos nach ihrer „Häufigkeit" oder „Anzahl") — eine Abbildung, die hinsichtlich ihres Gehaltes bei weitem nicht heranreicht an diejenige, welche der Stift des Zeichners, die Kamera des Photographen, der Pinsel des Malers hervorzubringen vermöchte, von dem Meissel des Bildhauers zu geschweigen, durch welche ja nicht blos die Anzahl, sondern vielleicht die ganze äussere Erscheinung, ja allerhand charakteristische Eigentümlichkeiten der Haltung und der geistige Ausdruck der Gesichtszüge der abgebildeten Persönlichkeiten zur Darstellung kämen. Noch weniger kümmern wir uns bei unserm Abbildungsverfahren um diejenigen Verhältnisse, die den Menschen am meisten vom Menschen zu interessiren pflegen. Von den Anlagen, Kenntnissen und Fertigkeiten, von dem ganzen Charakter der abgebildeten Personen — nicht zu reden von ihren Vermögensverhältnissen (!), die ja von andrer Seite auch wiederum der Darstellung durch Zahlen zugänglich wären — wird einfach abstrahirt. Von der Abstammung und sozialen Stellung, von der Vorgeschichte eines Jeden, seinen Aussichten für die Zukunft . . . von allem, was das Wesen seiner Persönlichkeit ausmacht, wird abgesehen; es wird, sofern es auch bekannt sein sollte, beim Zählen gelöscht, ignorirt.

Welcher gemüt- und phantasievolle Denker möchte sich angesichts dessen nicht versucht fühlen etwa zu sagen: „Natürlich haben auch die Zahlenverhältnisse ihren Wert; aber wo man diesen bedürfen wird, ist er nicht so schwierig zu ermitteln, um sich seiner nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen; *einen Hauptgesichtspunkt für die Betrachtung der Dinge aus ihren Zahlenverhältnissen zu machen halte ich für ebenso unfruchtbar* (irrig) *als langweilig*"*)!

*) Vergleiche einen analogen Ausspruch Lotze's in Bezug auf die begrifflichen Umfangsverhältnisse, den wir in § 15 citiren. Das Wort „unfruchtbar" fällt an andrer Stelle.

Langweilig, trocken, dürr etc.? — Vielleicht ja! — Man kann es auch heute noch niemand verwehren, die Arithmetik (als die Wissenschaft, die sich mit den Zahlenverhältnissen beschäftigt) langweilig zu finden. Es thun dies aber zumeist nur Solche, die entweder einen recht schlechten Elementarunterricht genossen oder sich überhaupt nicht der Mühe unterzogen haben, dieselbe kennen zu lernen.

Unfruchtbar? — Nein! — Es dürfte doch heutzutage wol niemand mehr es wagen, die Analysis und Mathematik, die Lehre von *Zahl* (*und Maass*), die messende und rechnende Physik, der Unfruchtbarkeit zu zeihen.

Und dennoch bleibt die Thatsache der Rohheit unsres Abbildungsverfahrens, welches bei jedem Zählen allemal bethätigt wird, bestehen; dennoch ist die ungeheure Dürftigkeit, welche auch der Ermittelung *metrischer* Beziehungen notwendig anhaftet, ganz unverkennbar, und selbst die Geometrie, indem sie noch die „gestaltlichen Verhältnisse" der Dinge in den Bereich ihrer Betrachtung zieht, ist doch unleugbar einseitig, sieht von den allerinteressantesten Eigenschaften der raumerfüllenden Substanz armselig ab.

Wie sind dabei nun die grossartigen Erfolge zu begreifen, die in einer (die Unterbrechungen eingerechnet) allerdings mehrtausendjährigen Geschichte gerade jene Wissenschaften thatsächlich errungen haben (und mit der Zeit nur immer reichlicher zu verwirklichen scheinen), welche sich die Erforschung der Gesetze der Dinge nach Zahl und Maass zur Aufgabe stellten?

Die Antwort gibt das alte Gleichniss von dem Bündel Pfeile, welches allen Versuchen, dasselbe zu zerbrechen, als Ganzes widerstand und sich erst Demjenigen ergab, der dasselbe auflöste, die Pfeile einzeln zu knicken:

Die Schwierigkeiten, welche dem Fortschritt der Erkenntniss entgegenstehen, sind auch nur einzeln zu überkommen, und gerade in ihrer Einseitigkeit, in der durch sie verwirklichten *Teilung der Arbeit* liegt das Verdienst und die Kraft der erwähnten Disziplinen.

In ebendiesem Sinne dürfen wir auch die unsrer Logik der Umfangsverhältnisse zur Last gelegte Einseitigkeit als einen *Vorzug* derselben in Anspruch nehmen. Indem die ältere Logik solche Einseitigkeit verschmähte, ist sie in den Jahrtausenden verhältnissmässig stehen geblieben, das Sprichwort illustrirend: qui trop embrasse, mal étreint.

Versuchen wir — es ist hohe Zeit — es jetzt einmal ernstlich *mit* solcher Einseitigkeit und gehen über den Vorwurf der Dürftigkeit, die ja allerdings in gewissem Sinne mit solcher naturnotwendig verknüpft ist, sich aber durch intensivere Entwickelung in ihrem eigenen Bereiche, durch grossen, ja ungeahnten, Reichtum der Entfaltung in andrer Hinsicht ausgleicht, zur Tagesordnung über.

Nicht übergehen dürfen wir jedoch diese Frage:

War es denn aber auch *wahr*, dass die Zahlenverhältnisse der Dinge gar „nicht so schwierig zu ermitteln seien, um sich ihrer (im Bedarfsfalle) nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen?“ Sind nicht vielmehr in der That Generationen scharfsinniger Forscher in unermüdlicher Arbeit fort und fort in Anspruch genommen, nur um dieser Zahlenverhältnisse sich immer mehr zu bemächtigen?

Und was zeigt sich nun auch in Bezug auf die Begriffsumfänge beim Vordringen auf unserm „einseitigen“ Pfade?

Es zeigt sich, dass schon diese „dürftigen“ Umfangsverhältnisse durchaus nicht so einfach zu übersehen sind, wie man anfangs sich einbilden mochte, ferner dass selbst bedeutende Philosophen in Fehler darin verfallen sind, und dass sich schwierige Probleme zur Lösung darbieten. Wer letzteres mit Aussicht auf Erfolg bestreiten wollte, der müsste wol erst einmal die in diesem Buch als noch ungelöst signalisirten Probleme lösen!

Ganz Zutreffendes über die vorliegende Frage sagt F. A. Lange auf p. 18 seiner citirten Schrift[1], wo er Ueberweg's Stellungnahme gegen die schematisirende formale Logik geisselt. Der sehr beachtenswerte Passus lautet:

„Wie nahe übrigens Ueberweg in Folge seines ungemeinen Scharfsinns, seinem eigenen erkenntnisstheoretischen Vorurteil zum Trotz, an die richtige Auffassung der logischen Technik streifte, zeigt eine zum § 84 (S. 234) gehörige Anmerkung, welche speziell gegen die geringschätzige Art gerichtet ist, in der Hoppe (Logik, Paderborn 1868) von dem »Denken nach dem Schema« redet im Gegensatz zu einem angeblichen Denken nach dem Begriff. Hier sagt Ueberweg wörtlich: »Mit gleichem Recht könnte man die mathematisch-mechanische Betrachtung als einseitig und willkürlich schelten, wenn sie untersucht, was aus gewissen einfachen Voraussetzungen folgt und dabei von andern Datis absieht, von denen jene in der Wirklichkeit nicht abgesondert vorzukommen pflegen, wenn sie z. B. die Bahn und die Stelle des Falls eines irgendwie geworfenen Körpers nur auf Grund der Gravitation und der Beharrung berechnet, ohne den Miteinfluss des Luftwiderstandes zu erwägen, sodass anscheinend die konkrete Anschauung das Resultat genauer zu bestimmen und über die Rechnung zu triumphiren vermag; wollte aber die mathematische Mechanik jenes abstraktive Verfahren nicht üben, so würde sie die Bewegungs*gesetze* überhaupt nicht zu erkennen vermögen und die Wissenschaft würde aufgehoben sein.« Es folgt die in der That schlagende Anwendung auf die Logik. Wer in ähnlicher Weise das abstrakte Verfahren der Logik von der Realität aus korrigiren will, »hebt durch dieses Verfahren nicht eine falsche Logik zugunsten einer bessern, sondern die Möglichkeit einer methodisch fortschreitenden logischen Erkenntniss der Denkgesetze selbst auf.«“

Erst nach beendeter Untersuchung über das, was aus den Umfangsverhältnissen der Begriffe schon allein folgt, wird die wissenschaftliche Theorie des Denkens auch andere Momente mit in Betracht ziehen dürfen. Wer freilich sich an ein gerade vorliegendes Beispiel hält und solches anderweitige Wissen, den nicht auf Umfangsverhältnisse bezüglichen Gehalt desselben, mit hinzunimmt, kann wol ein volleres Resultat zu besitzen glauben und auf den Logiker herabsehen, der sich mit dem dürftigen Schema des Umfangsverhältnisses plage. Allein Der wird auch stets am Beispiel hängen bleiben und sich ohne die Reflexion auf diese Verhältnisse, welche durch das Abstrahiren von allem übrigen bedingt ist, niemals zur Erkenntniss des allgemeinen Denkgesetzes erheben (vergl. Ueberweg l. c. mutatis mutandis).

So wird es auch Demjenigen, der ein Gemälde nach den Regeln der Perspektive beurteilt, nicht zu verargen sein, wenn er die Abstufungen der Farbentöne und die dem Bilde zugrunde liegende Idee des Künstlers dabei ausser Acht lässt. Soll das Bild gut sein, so muss vor allem die „dürftige“ Zeichnung, die wieder übermalt wird, jenen Gesetzen genügen. (Vergl. De Morgan[5] p. 83.)

Wenn gar aber Lotze seine Logik mit dem Wunsche schliesst, dass die deutsche Philosophie zu dem Versuche sich immer wieder erheben werde „den Weltlauf zu *verstehen* und ihn nicht blos zu *berechnen*“, so ist zu sagen: könnten wir ihn nur erst *berechnen*! dann würden wir gewiss ihn auch „verstehen“, soweit überhaupt ein Verständniss auf Erden erzielbar.

ε_3) Den Begriffen wird ihre Bildungsweise vorgeschrieben durch das „*Urteil*“. Durch das Urteil wird ausnahmslos einem Subjekte ein Prädikat beigelegt, zugeschrieben oder aber abgesprochen.

Für die komplizirteren Fälle, in welchen das Urteil sich aus Teilsätzen zusammensetzt, die durch Konjunktionen verbunden sind, behalten wir uns vor, dies in der Theorie erst genauer darzulegen; in solchen ist das Subjekt selbst ein Urteil, eine Aussage. In den einfacheren Fällen treten zumeist anderweitige Objekte des Denkens als Subjekt auf.

Dies Subjekt ist entweder ein Einzelding — und als solches ohnehin ein Begriff — oder es ist eine Klasse von Einzeldingen, und auch diese erscheint gewöhnlich zusammengehalten und bestimmt durch das Band eines ihre Individuen verknüpfenden Begriffes. Das Urteil *bejaht* dann, oder *verneint*, das Prädikat von allen Individuen dieser Klasse und damit zugleich von ihrem Begriffe.

Soferne das Urteil anerkannt, zur Überzeugung erhoben, adoptirt wird — und dies zu werden ist der letzte, der Endzweck aller Urteile, welcher nur vorübergehend durch den mittelbaren Zweck einer blos provisorischen Annahme des Urteils verdrängt zu werden vermag — erfüllt es alsdann folgende Mission, Bestimmung.

Sofern es *bejahte*, begründet es hinfort, wird es zum Ausgangspunkt für — eine Gewöhnung des Geistes, die Merkmalgruppe des Subjektbegriffes (und damit zugleich eines jeden seiner Individuen) stetsfort zu verknüpfen mit den Merkmalen des Prädikatbegriffes, die letzteren geradezu in den Subjektbegriff selbst aufzunehmen und als einen integrirenden Bestandteil seines Inhaltes mit diesem zu verschmelzen.

War solche mentale Gewöhnung schon ehe das Urteil fiel vorhanden, so erscheint dasselbe als überflüssig, oder es dient doch nur dazu, gedachte Gewöhnung zum Bewusstsein zu bringen, in diesem wieder aufzufrischen und zu festigen.

Sofern das Urteil *verneinte*, beugt es jedenfalls der genannten durchgängigen Verknüpfung vor.

Im übrigen lässt der Sinn und die Tragweite der sog. „verneinenden" Urteile verschiedene Auffassungen zu (als negativ prädizirende oder aber negative), in Bezug auf welche ich mich in Gegensatz zu Sigwart werde stellen müssen. Die Kontroversen können nicht kurzerhand vorweg abgemacht werden und ist in ihrem Betreff auf die Theorie (7te Vorlesung) zu verweisen. Es wird sich zeigen, dass, was wir — um den streitigen Fragen hier noch auszuweichen — nunmehr im Hinblick auf die bejahenden Urteile sagen werden, sich auch auf die „verneinenden" übertragen lässt.

Das Prädikat ist selbst ein Begriff. Und dieser ist, wenn nicht mit dem Subjektsbegriffe „identisch", so allemal ein „höherer" Begriff, die Prädikatklasse dann der Subjektklasse „übergeordnet".

Psychologisch jedoch ist es nicht erforderlich das Prädikat überhaupt als eine *Klasse* zu denken.

Wenn ich z. B. sage (cf. Mill[2] pag. 113, 117) „Schnee ist weiss", so will ich dies von irgend welchem, von *allem* Schnee gesagt haben, und ist es richtig, dass aller Schnee enthalten ist in der Klasse der „weiss" zu nennenden Dinge. Thatsächlich brauche ich aber bei jener Aussage an sonst nichts Weisses zu denken und will ich in der That damit nur kundgeben, dass in meiner Vorstellung vom Schnee das Merkmal der „Weisse" ein Element bildet, dass er mir die Empfindung erregt, die (durch Abstraktion von irgend welchen weissen Dingen gewonnen) als die Vorstellung von „weiss" ein isolirter und bleibender Besitz meines Geistes geworden ist. Die analoge Betrachtung in Bezug auf den Satz: „Blut ist nicht weiss (sondern rot)" durchzuführen überlassen wir dem Leser.

Wir heben dies ausdrücklich hervor, um uns gegen den Vorwurf

zu verwahren, als ob wir den Umstand übersehen hätten, wenn wir späterhin aus Gründen wissenschaftlicher Zweckmässigkeit auf das Verhältniss zwischen der Subjekt- und der Prädikat*klasse* vorwiegend reflektiren, die beiden Begriffe gleichwol nach ihren Umfangsbeziehungen ins Auge fassen.

Aus alledem wird zunächst ersichtlich sein, wie die Urteile bezwecken, auf die (definitive) Gestaltung der Begriffe hinzuarbeiten und einzuwirken.

Ich will nunmehr noch den Gedankengang Herrn Charles S. Peirce's darlegen, durch welchen er in der Einleitung zu seiner grundlegenden Arbeit[5] das Wesen der Urteile und auch der *Schlüsse* von einer neuen Seite beleuchtet. Damit werden wir dann auch auf die Frage nach dem Wesen der *Folgerichtigkeit* der letztern zurückkommen. Indem ich hinsichtlich des Wortlautes auf pag. 15 sqq. der Peirce'schen Schrift verweise, darf ich mich seiner Betrachtungsweise in *freier* Reproduktion anschliessen und mir auch kritische Zwischen- und Zusatzbemerkungen gestatten.

ξ_3) Denken — sagt Peirce ungefähr — Denken *als Gehirnthätigkeit* („cerebration") ist ohne Zweifel den allgemeinen Gesetzen der Nerventhätigkeit (nervous action) unterworfen.

Es erscheint darum gerechtfertigt, zunächst einmal die letztere im allgemeinen zu betrachten.

Wenn eine Gruppe von Nerven gereizt (erregt, stimulirt) wird, so werden die Nervenknoten (Ganglien), mit denen die Gruppe im engsten Zusammenhange steht, — und schliesslich das Centralorgan des Geistes selbst — in einen Zustand der Thätigkeit versetzt, welcher seinerseits nicht selten Bewegungen des Körpers veranlasst.*) Wenn der Reiz (the stimulation) fortdauert, verbreitet sich die Erregung (irritation) von Ganglion zu Ganglion, gewöhnlich dabei anwachsend. Bald auch beginnen die zuerst erregten (excitirten) Nerven Ermüdung zu zeigen, und so ist aus doppeltem Grunde die körperliche Thätigkeit von einer wechselnden Art. Wenn die Reizung beseitigt wird, hört auch meist die Erregung rasch auf.

Aus diesen Thatsachen geht hervor, dass wenn ein Nerv affizirt wird — solange bis die Stimulation unangenehm wirkt — die Reflexthätigkeit, wenn sie nicht von vornherein von solcher Art ist, den

*) Man denke z. B. an das Hinblicken auf eine auffallende (Licht-)Erscheinung im Gesichtsfelde, an das Blinzeln, Ausweichen bei drohendem Stoss, das Schlagen nach dem Insekt bei Mosquitostich und dergleichen.

Reiz zu beseitigen, ihren Charakter wieder und wieder verändern wird, bis der Reiz beseitigt ist, und darnach erst wird diese Thätigkeit aufhören.

Nun haben alle Lebensprozesse eine Tendenz und die Fähigkeit durch *Wiederholung* (repetition) leichter zu werden — innerhalb gewisser Grenzen wenigstens, deren Überschreitung als Übermüdung, Überanstrengung, beziehungsweise Altersabnahme und -schwäche zu bezeichnen wäre. Längs was immer für einem Pfade eine nervöse Entladung (a nervous discharge) einmal gegangen ist, längs ebendieses Pfades wird eine neue der vorigen gleichartige Entladung um so leichter und wahrscheinlicher wieder stattfinden. Es beruht auf dieser allbekannten Thatsache der Nutzen und Erfolg der *Übung*.

Demgemäss wenn eine Nervenerregung wiederholt wird, so sind alle die verschiedenen Thätigkeiten, welche bei vorhergegangenen ähnlichen Veranlassungen stattgefunden haben, in der günstigeren Lage, auch jetzt wieder stattzufinden, und zwar werden diejenigen am ehesten wieder eintreten, welche am häufigsten stattgefunden haben bei jenen vorausgegangenen Veranlassungen. Nun mögen die verschiedenen Handlungen, welche die Reizung nicht beseitigten, vorher manchmal ausgeführt worden sein und manchmal nicht; aber diejenige That, welche die Reizung beseitigt, muss am häufigsten ausgeführt worden sein, weil die Einwirkung in der Regel fortgedauert haben wird bis sie vollzogen wurde.*) Darum muss eine starke *Gewöhnung* daran, der gegebenen Reizung auf diese besondre Weise zu begegnen, rasch sich ausbilden.

Eine so erworbene Gewohnheit kann auch als eine Disposition, eine Anlage zu ihrer Ebenfallserwerbung weiter vererbt werden — sagt Peirce ungefähr; dies dürfte jedoch als eine von der Physiologie noch nicht völlig entschiedene Frage zu bezeichnen sein und wird bekanntlich solches von einer Autorität wie die des Herrn Weismann entschiedenst bestritten.

η_3) Zu unsern wichtigsten Gewohnheiten gehören diejenigen, kraft deren gewisse Klassen von Antrieben oder Reizungen uns zuerst in eine blos geistige, physiologisch betrachtet, blos cerebrale oder Hirnthätigkeit versetzen.

*) Es dürfte fraglich erscheinen, ob wirklich der angeführte Grund der ausschlaggebende ist, ob nicht vielmehr das Residuum, welches die vorangegangnen Erlebnisse, in Gestalt der Erinnerung an die früher erfolgreich gewesene Thätigkeit, im Geist und seinem Organe hinterlassen, dabei wesentlich mitwirkt (unter der Konkurrenz einer Gewohnheit, als vergeblich Erkanntes nicht wieder zu versuchen).

Der Anblick eines hübschen Gegenstandes z. B. mag den Wunsch erzeugen, denselben zu besitzen, welcher in dem Vorsatz gipfelt, bei nächster Gelegenheit sich seinesgleichen zu kaufen.

Sehr oft aber ist es auch nicht eine äussere Empfindung, ein Sinneseindruck (an outward sensation), welcher den Gedankengang in Fluss bringt (which starts the train of thought), sondern die Reizung, statt *„peripherisch“* zu sein, ist *„visceral“* (aus den Eingeweiden, aus dem Innern des Leibes stammend).

So wenigstens Peirce. Für diese für ihn charakteristische Ausdrucksweise scheint mir aber eine Modifikation wünschenswert zu sein. Gemeinhin möchte man wol die eigentlich oder im engeren Sinne „visceralen“ Reize — wie Hunger, Geschlechtstrieb, Kopfweh — mitsamt den peripherischen Sinneseindrücken als *physische* Antriebe gegenüberstellen den *psychischen*, von denen Peirce nunmehr reden will, im Hinblick wenigstens auf die Hirnthätigkeit, die sie begleitet.

Solche Antriebe zu Denkhandlungen oder wirklichen Thaten, wie sie als Hass, Liebe, Furcht etc. und namentlich, durch den Stand unsrer Einsicht bedingt, als Beweggründe (Motive) mannigfachster Art; wie Eigennutz, Selbstsucht, Pflichtgefühl, Gemeinsinn, in unserm Bewusstsein existiren, zu den „visceralen“ (vielleicht Unterabteilung der grosshirnig-cerebralen) Reizungen zu rechnen, dürfte doch etwas gewagt erscheinen und überhaupt nur angängig sein, sofern man einseitig lediglich die Zustände oder Vorgänge in's Auge fasst, welche im (als „wirklich“ supponirten) Nervensystem den Bewusstseinsvorgängen — nach heutigem Stand der Physiologie — parallel gehen. Hierauf allerdings hat Peirce von vornherein schon hingewiesen durch die Bemerkung, dass er das Denken (nur) „as cerebration“ betrachten wolle. Nunmehr führt er fort:

In solchem Falle hat die Thätigkeit in der Hauptsache denselben Charakter: eine innere Thätigkeit beseitigt die innere Reizung. Eine vorgestellte Konjunktur von Umständen veranlasst uns dazu, eine geeignete Richtschnur des Handelns (line of action) vorzustellen.

Man findet, dass solche Vorkommnisse, auch wenn keine äussere Handlung eintritt, doch in hohem Maasse dazu beitragen, dass in uns eine Neigung, Gewohnheit sich ausbilde, wirklich auf die vorgestellte Weise zu handeln, wenn die vorgestellte Gelegenheit annähernd eintritt.

Eine cerebrale Gewöhnung (Gewohnheit? — „cerebral habit“) der höchsten Art, welche für eine unabsehbare Reihe von Gelegenheiten bestimmen wird, sowol, was wir in Gedanken, als was wir in Wirklichkeit thun, wird ein *„Glaube“* genannt.

Peirce sagt durchweg „belief“, nicht *Überzeugung*, conviction, oder Meinung, Ansicht, opinion, view. Wegen der Schwierigkeit, die spezifisch religiöse Nebenbedeutung („faith“), mit welcher (im Deutschen) das Wort „Glaube“ behaftet erscheint, nicht unnötig in den Vordergrund treten zu

lassen, würde ich das Wort „Überzeugung“ vorziehen, wenn nicht dieses seinerseits wieder eine zu enge Bedeutung hätte, indem es auf ein schon ganz feststehendes, über jedes Zweifeln erhabenes Glauben hinzuweisen pflegt. Das Wort „ein Glaube“ soll hier nur irgend etwas, was jemand eben glaubt, bezeichnen.

Bringen wir es uns *zum Bewusstsein*, dass wir eine spezielle Gewöhnung (specified habit) dieser Art *haben*, so vollziehen wir ein „*Urteil*“ (judgment).

Unter Umständen möchte ich vorziehn zu sagen: ... dass wir sie erwerben, sie begründen oder fortan *haben werden*. Indessen hat Herrn Peirce's Ausdrucksweise hier den Vorzug, für alle Fälle wenigstens zuzutreffen, wenn sie dafür auch nicht alles erschöpfen dürfte, was im Urteil liegen kann.

Zum Beispiel: schliessen wir uns dem Urteil an: „der Mars ist von intelligenten Wesen bewohnt“ (wie dies neuerdings sehr wahrscheinlich geworden ist), so konstatiren wir (für uns und Diejenigen, die wir etwa durch den Hinweis auf die schnurgeraden Kanäle von Schiaparelli's areographischer Karte ebendavon überzeugen oder überreden) — eventuell beginnen und festigen, *gewinnen* wir damit eine *Gewohnheit*, die Oberfläche jenes (die Erde an Alter wol weit übertreffenden) Planeten belebt zu denken mit Wesen, die auf die Umgestaltung dieser Oberfläche, ja auf die Konfiguration des Festlandes dortselbst zweckbewusst und mit erfolgreicher Technik einwirkten. —

Es tritt, wie mir scheint, auf diesem, dem intellektuellen Gebiete die merkwürdige Thatsache hervor, dass oft ein Augenblick schon genügt (ein Augenblick, nämlich, des „Einleuchtens“), um die allerfestesten und unerschütterlichsten Gewohnheiten sich anzueignen, Gewohnheiten, die nicht selten mit äusserster Zähigkeit für's ganze Leben festgehalten werden.

Die Kraft, mit welcher eine Überzeugung so als eine Denkgewohnheit festgehalten wird, pflegt mehr oder minder vollkommen die reichliche Übung zu ersetzen, die sonst — auf dem Gebiet der äusseren körperlichen Thätigkeiten wenigstens und auch bei vorwiegend mechanischem Auswendiglernen — unerlässlich scheint zur Erwerbung und Festigung einer Gewohnheit. Die Intensität dieser Kraft erscheint mitbedingt durch den Grad der Evidenz; sie steigert sich nach Maassgabe, je deutlicher wir (einmal oder zu immer wiederholten malen) das im Urteil Gedachte als ein durch objektive Notwendigkeit zu denken Gebotenes zu erkennen glauben. Bei den unmittelbar einleuchtenden, „analytischen“ oder selbstverständlichen Wahrheiten ist die Tyrannei dieser Gewohnheit eine so grosse, dass man von vornherein gar nicht anders kann, als derselben huldigen. Der Begriff der Gewohnheit erhält in solchem Falle einen volleren Inhalt als gewöhnlich, den reichsten wol, der überhaupt ihm zukommen kann: sie artet in einen Grenzfall aus und fällt geradezu zusammen mit einem absoluten Zwange (der „Denknotwendigkeit“).

Eine Denkgewohnheit kann natürlich auch verhältnissmässig unwichtig und kurzlebig sein. Wer z. B. urteilt: „ich bin hungrig“, manifestirt damit eine Gewohnheit, sich, sooft er an seinen gegenwärtigen Zustand zurückdenken mag, von Hungergefühl befallen zu denken — eine Gewohnheit indess, die meistens wieder verloren gehen wird, sobald darnach Sättigung stattgefunden.

In den meisten Fällen möchte das, was Peirce hier als das Bewusstwerden und den Anfang einer Denk*gewohnheit* hinstellt, vielleicht treffender als das Innewerden einer permanenten *Neigung* (wo nicht subjektiven Notwendigkeit) des Denkens bezeichnet werden. Doch mögen wir — nach dem Billigkeitsanspruche „sit venia verbo“ — das Wort „Gewohnheit“ immerhin cum grano salis beibehalten.

ϑ_3) Eine Glaubensgewohnheit (belief-habit) kann in ihrer Entwickelung damit beginnen, noch unentschieden, schwankend und schwach zu sein; sie vermag jedoch unbeschränkt zu werden: schärfer ausgeprägt, stärker und von weiterer Sphäre der Wirksamkeit — Peirce lässt sie anfangs unbestimmt, mit Besonderheiten behaftet und dürftig (vague, special and meagre) sein, hernach präziser, allgemeiner und vollständiger (more full) werden.

Der Vorgang dieser Entwickelung, *soweit er im Bewusstsein* (in imagination) *stattfindet*, heisst *Denken* (thought).

Urteile werden gebildet, und unter dem Einfluss einer Glaubensgewohnheit erzeugen sie oft ein neues Urteil, welches als ein Zuwachs zu dem Glauben erscheint. Ein solcher Vorgang wird *Schliessen* (an inference) genannt.

Das oder die vorangegangenen Urteile heissen die Voraussetzungen oder *Prämissen*, das nachfolgende Urteil der Schluss, die *Konklusion*.

Die Gewohnheit des Denkens, welche den Übergang von den ersten zu der letzten vermittelte und bestimmte, wenn als Satz formulirt zum Bewusstsein gebracht, heisst das „leitende Prinzip“ (the leading principle) des Schliessens. (Beispiele weiter unten.)

Während aber dieser Prozess des Schliessens oder die spontane Entwickelung von Überzeugungen (des „Glaubens“) fast beständig in uns vorgeht, erzeugen auch neue peripherische Reizungen immerfort neue Glaubensgewohnheiten.

Für unsre Kulturepoche glaube ich als einen höchst wesentlichen Teil dieser neuen Anregungen die durch Beispiel, Unterricht, Wort, Schrift, Druck und Bild bewirkte Mitteilung resp. Übertragung der Ansichten und Überzeugungen andrer Menschen, von Sachverständigen, Fachgenossen etc. doch ganz besonders hervorheben zu sollen.

So wird der Glaube (das Glauben) zum Teil durch frühere Überzeugungen bestimmt, zum Teil durch neue Wahrnehmungen.

Herrscht nun aber eine Gesetzmässigkeit in allen diesen Wandlungen?

Die Forschung besteht darauf (maintains), dass dies der Fall ist, nämlich dass sie alle hinsteuern auf *ein Endziel* (gerichtet, angepasst sind, are . . adapted to an end), nämlich das: den Glauben mit der Zeit gewissen vorbestimmten Erkenntnissen entgegenzuführen (that of carrying belief, in the long run, toward certain predestinate conclusions), welche die nämlichen sind für alle Menschen und welche bleiben.

Dies ist der „*Glaube*" (the faith) des Forschers.

Auf dieser stillschweigend angenommenen Thatsache beruhen alle Maximen des Überlegens (maxims of reasoning) und auf Grund derselben wird das, was zuletzt geglaubt werden muss, unabhängig sein von dem, was bisher geglaubt worden ist, und wird den Charakter der Wahrheit (reality) haben.

Kommt diese Wahrheit auch für den Einzelnen vielfach noch nicht zum Durchbruch, so wird sie doch (mehr und mehr auf jedem Gebiete) einst ihre Herrschaft entfalten für das Geschlecht. Der Glaube an ihre Erkennbarkeit, an ihren endlichen und definitiven (endgültigen) Sieg oder Triumph, liegt ganz gewiss der Forschung zugrunde und an der Verwirklichung dieses Ideals mitzuarbeiten schwebt jedem Forscher vor.

Diesen Glauben nimmt nun Peirce auch für den *Logiker* in Anspruch (dem Wortlaute nach sogar *nur* für diesen) und sagt:

Wenn darum eine gegebene Gewohnheit des Folgerns (a given habit, considered as determining an inference) von solcher Art ist, dass sie auf das gemeinsame Endziel hinwirkt (is of such a sort, as to tend toward the final result), so ist sie korrekt und andernfalles nicht. So zerfallen die Schlussfolgerungen (inferences become divisible) in *gültige* (the valid) und in *ungültige* (the invalid), und daraus schöpft die Logik ihre Existenzberechtigung.

Man sieht, dass hier Peirce dem Ergebnisse der Erkenntnisstheorie sozusagen teleologisch vorgreift.

Da nun diese Auffassung der Folgerichtigkeit die Ergänzung, deren sie bedürftig erscheint, durch Sigwart bereits gefunden hat — vergl. unter A der Einleitung die Absätze β) und $\zeta \ldots \iota$) — so glauben wir der Auseinandersetzung nach dieser Richtung nichts mehr hinzufügen zu sollen.

ι_3) Das Eigentümliche und Verdienstliche an dieser den Kern der Sache jedenfalls nahe streifenden Auseinandersetzung von Peirce scheint mir zu sein: die nachdrückliche Hervorhebung des Moments der *Gewohnheit* in Bezug auf das Urteilen (mit Überzeugung, das Glauben) sowol, wie auf das Folgern oder Schliessen.

Ein spezielles, individuelles Handeln kann niemals selbst als eine Gewohnheit bezeichnet werden; es kann, als ein *ein*maliges, höchstens zum Ausgangspunkt für eine solche werden oder ein Ausfluss einer

solchen sein. Gewohnheit (und Neigung, Disposition) ist etwas Gemeinsames, übereinstimmend Wirkendes in einer ganzen Klasse von Handlungen (die, sofern sie auch bei verschiedenen handelnden Personen verglichen werden, sogar unbegrenzt, eine offene Klasse sein mag und in Bezug auf den Einzelnen die gleiche Bezeichnung nur insofern nicht verdienen wird, als das Leben desselben eine unbegrenzte Menge von Handlungen überhaupt nicht in sich fassen kann); die Gewohnheit ist immer von einem mehr oder weniger *allgemeinen* Charakter.

Eine Gewohnheit veranlasst uns, unter ähnlichen Umständen auch immer ähnlich zu handeln, d. h. unter Umständen, die einander in einer bestimmten Hinsicht *gleichen*, stets Handlungen zu vollziehen, die wiederum in bestimmter (vielleicht in einer ganz andern) Hinsicht einander gleichen. Die zeitliche Succession der übereinstimmenden Merkmale jener Umstände und dieser Handlungen, wenn aus einem physiologischen Grunde erfolgend (und zugleich vielleicht durch ein psychologisches Motiv verursacht), macht das Wesen der Gewohnheit aus.

In den verschiedenen Fällen, in denen „dieselbe" Gewohnheit wirksam ist, werden darnach die „spezifischen Differenzen" zwischen den Gruppen jener Umstände sowol als auch zwischen diesen Handlungen nebensächlich, ohne Belang sein.

Gelingt es, die übereinstimmenden Merkmale (eventuell auch nur „wesentliche" von diesen Merkmalen) jener Umstände und dieser Handlungen in Zeichen darzustellen, bei denen jene spezifischen Differenzen unausgedrückt bleiben, offen gelassen werden — m. a. W. vermögen wir nur den „Begriff" der Umstände, unter welchen gedachte Gewohnheit wirkt, und den „Begriff" der Handlungen, die sie dann hervorruft, darzustellen, so werden wir ein *Schema* für die Gewohnheit erhalten: *sooft Umstände* (von den Merkmalen) *A eintreten, thun wir B* (vollziehen eine Handlung von den Merkmalen *B*).

Jede Gewohnheit muss so ein *allgemeines Schema* haben.

Als Umstände haben wir jetzt hauptsächlich Zustände des Bewusstseins und zwar besonders *Meinungen*, als Handlungen ebenso vorzugsweise Denkhandlungen, *die Bildung neuer Meinungen* im Auge.

Es wurde erkannt, dass solche Meinungen wesentlich selbst schon Gewohnheiten im Denken sind oder zu solchen werden.

$\varkappa_3$) Aus solchen, den „Prämissen" *p* kann sich eine neue Denkgewohnheit und Meinung entwickeln: die „Konklusion" *c*. (Vergleiche wieder Peirce l. c.)

„Es gilt p, ergo gilt auch c", oder abgekürzt:

„p, ergo c"

ist darum das Schema jeder Folgerung.

Die Konjunktion „ergo, folglich, also (therefore)" ist das Zeichen des Schliessens (sign of illation).

Der Übergang von der Prämisse (oder dem System der Prämissen, set of premises) p zu der Konklusion c findet beim Schliessen statt gemäss einer in uns wirksamen Denkgewohnheit oder Regel.

Obwol diese das Folgern beherrschende oder „leitende" Gewohnheit gewöhnlich nicht vom Bewusstsein objektivirt wird (is not present to the mind), sind wir uns doch bewusst, nach einem allgemeinen Prinzip (on „some" general principle) zu schliessen.

Alle Schlussfolgerungen, welche ebendiese Denkgewohnheit bestimmen würde sobald nur die geeigneten (d. i. die unter den ersten Teil ihres Schemas fallenden) Prämissen zugelassen wären (when once the proper premises were admitted), bilden eine Klasse. Und die Denkgewohnheit ist vom Standpunkt der Logik eine *gute* zu nennen, wenn sie niemals (oder im Falle eines Schlusses nach der Wahrscheinlichkeit, in case of probable inference, selten) von einer wahren Prämisse zu einer falschen Konklusion führen würde; andernfalles ist sie *verwerflich* (logically bad). M. a. W. Jeder denkbare Fall der Wirksamkeit einer *guten* Gewohnheit des Schliessens würde entweder ein solcher sein, in welchem die Prämisse falsch, oder ein solcher, in welchem die Konklusion wahr ist. Wogegen, wenn eine solche Gewohnheit schlecht ist, Fälle denkbar sein würden, in welchen die Prämisse wahr ist, während die Konklusion falsch bleibt.

Wir sahen, dass eine jede Gewohnheit ein allgemeines Schema haben muss. Dies gilt mithin auch von einer Denkgewohnheit, welche beim Folgern wirksam ist, das Ziehen von Schlüssen beherrscht: dieselbe wird sich allemal durch einen Satz darstellen lassen, dass ein Urteil (proposition) C von einer gewissen allgemeinen Form, welches in einer bestimmten Beziehung steht zu einem Urteil (oder einer Gruppe von Urteilen) P von ebenfalls allgemeinem oder schematischem Ausdruck, wahr sein muss, sobald dieses letztere wahr ist.

Ein solcher Satz ist dann das *„leitende Prinzip"* der Klasse von Schlussfolgerungen, deren Gültigkeit (validity) es in sich schliesst (implies).

Wird der Schluss erstmalig gezogen, so pflegt (wie schon angedeutet) das leitende Prinzip, solchergestalt formulirt, dem Geiste

nicht gegenwärtig zu sein. Aber die Gewohnheit, deren Schema es darstellt, ist in einer solchen Weise wirksam, dass bei Vergegenwärtigung (upon contemplating) der angenommenen (believed) Prämissen durch eine Art Intuition (Wahrnehmung, perception) auch die Konklusion für wahr erachtet wird.

Mit diesen Worten „by a sort of perception" beruft sich auch Peirce auf das von Sigwart mit Recht stärker hervorgehobene, ja in den Vordergrund gestellte Bewusstsein der objektiven Denknotwendigkeit oder Gefühl der Evidenz.

Wenn hernach die Schlussfolgerung einer logischen Kritik unterworfen wird, so vollziehen wir eine neue Schlussfolgerung, deren eine Prämisse jenes leitende Prinzip der vorigen ist (gemäss welcher Urteile, die in bestimmter Beziehung zu einander stehen, geeignet erscheinen, Prämisse und Konklusion eines gültigen Schlusses zu sein), während die andere Prämisse eine Thatsache der Wahrnehmung (observation) ist, nämlich der Beobachtung, dass die genannte (gegebene) Beziehung wirklich besteht zwischen der Prämisse und der Konklusion der in Frage (under criticism) stehenden Schlussfolgerung, dass m. a. W. das Schema jenes leitenden Prinzips im vorliegenden Falle zutrifft, und woraus dann geschlossen wird, dass diese Folgerung berechtigt, gültig war.

Ein Beispiel, an das wir noch weitere Unterscheidungen anknüpfen, mag dies verdeutlichen. Wir wählen hier das folgende (obzwar sehr abgedroschene, weil fast in allen Schriften über Logik einmal erwähnte):

Cajus ist ein Mensch,	a ist ein b,
ergo: Cajus ist sterblich.	ergo: a ist c.

Das rechts dem Schlusse beigefügte „Schema" desselben zeigt, dass ihm (so wie er zunächst sich darstellt) *logische Gültigkeit* nicht zukommen kann. Es kann nicht eine (gute) Denkgewohnheit uns von einer Prämisse der Form „a ist ein b" hinüberleiten zu einer Konklusion „a ist c".

Dass vielmehr eine solche Gewohnheit, falls sie überhaupt bestünde, eine schlechte sein müsste, wäre leicht an beliebigen Beispielen darzuthun: indem wir dem a dieselbe Bedeutung „Cajus", dem b die „Mensch" wie in dem Beispiel belassen, brauchen wir etwa nur dem c die Bedeutung „unsterblich" (oder „vollkommen" und anderes) beizulegen, um die Haltlosigkeit des Schlusses zu erkennen. Die Folgerung wäre alsdann eine solche, deren Prämisse wir als richtig, deren Konklusion wir aber als falsch (mit einer gewissen Denknotwendigkeit) anerkennen müssen.

Gleichwol lässt sich die obige Konklusion sowol, als die Prämisse,

für richtig erklären, und die Schlussfolgerung besitzt darum das, was man die „extralogische Gültigkeit“ derselben nennen könnte: sie ist „*materiell*“ (aber nicht „formell“) richtig.

Von der angeführten Prämisse *allein* konnte, wie gezeigt, eine Denknotwendigkeit die Konklusion hier nicht liefern. Da diese letztere aber richtig ist, so *kann* es dennoch eine gute Denkgewohnheit gewesen sein, die zu ihr hinführte (auch eine, die vom Gefühl der Denknotwendigkeit begleitet sein mag), aber dann von andern Prämissen aus, nämlich von einer Gruppe solcher, die aus der angegebenen durch geeignete Ergänzung, Vermehrung hervorgehen.

Thatsächlich wirkte bei obigem Schlusse noch etwas, eine Denkgewohnheit, mit, die uns zur richtigen Konklusion leitete, indessen als Prämisse unausgesprochen blieb. Man kann den Schluss gelten lassen als einen *unvollständigen*, als ein sog. „*Enthymem*“.*)

In Enthymemen wird im gemeinen Leben sehr häufig geschlossen, wobei dem Verfahren die Tendenz der Abkürzung und die Höflichkeit zugrunde liegt, bei dem Hörer, dem man die erforderliche mentale Ergänzung des Schlusses zuschiebt, auch selbstthätige denkende Mitwirkung vorauszusetzen.

Bringen wir uns dieses (anfänglich eventuell unbewusst gebliebene) Agens zum Bewusstsein, so finden wir, dass es die Überzeugung war, dass *alle* Menschen sterblich seien.

Dieser Glaube, selbst eine Denkgewohnheit, wird von Peirce geradezu als das „leitende Prinzip“ des vorliegenden Enthymems hingestellt — mit einer gewissen Berechtigung vielleicht, obwol nicht in dem sonst üblichen Sinne.

Fügen wir denselben ausdrücklich, als Urteil gefasst, der bis-

---

*) Es gibt auch Grenzfälle von Enthymemen, wo dieser Name sich als nicht mehr angemessen beanstanden lässt. Solche treten ein, wenn die ausdrücklich angeführte Prämisse (oder eine derselben) sogar als völlig belanglos, überflüssig zu erkennen ist, wenn man etwa die sämtlichen wirklich wirksamen Prämissen mit Stillschweigen übergangen findet. So z.B. bei dem auch „materiell“ wenigstens richtigen „Schlusse“ (?):

Vorgestern regnete es irgendwo
ergo: geht morgen die Sonne auf.

Die wirksamen Prämissen dieses Enthymems — falls man es noch so nennen will — würden etwa sein: Jeden Tag geht (in unsern Breiten) die Sonne auf; Morgen ist auch ein Tag. — Man wird in solchem Falle sagen, dass das Wort „ergo“ am unrechten Platze sei, und gar kein Schluss vorliege, sondern nur eine Reihe von ausser Zusammenhang stehenden Behauptungen.

herigen Prämisse hinzu, reihen wir dieses Urteil in unsre Prämissen ein, so lautet der Schluss nunmehr:

Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, ergo: Cajus ist sterblich.	Schema: $P)\begin{cases}\text{Alle } b \text{ sind } c,\\ a \text{ ist ein } b,\end{cases}$ ergo $C)$: a ist c.

Der so vervollständigte Schluss besitzt nunmehr auch *logische* Gültigkeit; er ist auch „*formell richtig*“ und zur Bekräftigung dessen vermögen wir uns nur darauf zu berufen, dass auch sein allgemeines Schema (unmittelbar) *einleuchtet*. Aus diesem Grunde ist der Schluss nunmehr auch ein „vollständiger“ (a complete argument).

Bringen wir uns noch das „leitende Prinzip“ dieses Schlusses zum Bewusstsein, so werden wir, die Aufgabe etwa von der psychologischen Seite angreifend, vielleicht finden, dass es die Überzeugung ist: dass ein Merkmal des Merkmals eines Dinges auch ein Merkmal dieses Dinges selbst sein müsse. Wir haben dann den Schluss:

Nota notae est nota rei ipsius,
Sterblichkeit ist ein Merkmal der Menschennatur, welche Merkmal des Cajus ist, ergo: Sterblichkeit ist ein Merkmal des Cajus.

Aber dieses selbe Prinzip des „nota notae etc.“ ist wiederum wirksam beim Ziehen dieser letzteren Schlussfolgerung, sodass dieselbe durchaus nicht vollständiger ist als die vorhergehende. Auch hat sie das gleiche Schema wie diese.

Die in diesem Schema niedergelegte (formulirte, in dasselbe eingekleidete) Denkgewohnheit mögen wir als das leitende Prinzip selbst hinstellen.

Das Schema des Schlusses erhält man, indem man die Namen der speziellen Dinge, von welchen die Schlussfolgerung spricht, durch Symbole von allgemeiner Bedeutung, Buchstaben, ersetzt, für diese aber alle Beziehungen, welche die Schlussglieder (Prämissen und Konklusion) von jenen Dingen ausdrücklich voraussetzten oder behaupteten, entsprechend zum Ausdruck bringt.

Aus obigen Betrachtungen erhellte auch, dass man, um eine vielleicht materiell richtige Schlussfolgerung als eine dennoch unberechtigte zu erkennen, sie als *logisch ungültig* nachzuweisen, nur zu ihrem Schema ein Beispiel zu finden braucht, in welchem die Prämissen als richtig anzuerkennen sind, während die Konklusion sich als falsch erweist. Auch bei solcher Anerkennung wird an das Gefühl der Evidenz appellirt. (Vergl. hiezu eine in § 12 gegebene Illustration.)

Kürzer auch mag man direkt jene Namen durch irgend welche andere ersetzen, für die zwar die Prämissen noch zutreffen, die Konklusion aber nicht mehr zutreffen würde.

Der Mangel oder das Ausbleiben des Gefühles der Evidenz genügt ohne weiteres in der Regel noch nicht zu obigem Zwecke, dem Ungültigkeitsnachweise für eine gegebene Schlussfolgerung — in Anbetracht dass man schon bei logisch berechtigten Schlüssen in verwickelteren Fällen oft langer Schlussreihen, erst mühsamer Zwischenüberlegungen bedarf, um das Gefühl von der Evidenz der Folgerung, die Überzeugung von ihrer Denknotwendigkeit zu gewinnen.

λ_3) Ich habe noch zu erklären, weshalb hier die Logik als eine Algebra dargestellt und in dieser Darstellung berechtigt erscheint, sich im Gegensatz zu andern Behandlungsweisen vorzugsweise das Epitheton einer „exakten" Logik beizulegen.

In dem Bestreben, die Grundgesetze folgerichtigen Denkens zum Bewusstsein zu bringen und denselben einen allgemeinen, zugleich möglichst einfachen Ausdruck zu geben, hat sich die Logik ursprünglich enge an die *Wortsprache* angelehnt. Sie musste dieses thun, da ein andres Mittel des Gedankenausdrucks zunächst überhaupt nicht zugebote stand, und sie wird auch in Zukunft fortfahren müssen, bis zu einem gewissen Grade diesen Anschluss zu suchen, nicht nur, weil sie sich dem Anfänger gegenüber stets in der gleichen Lage befindet, sondern auch, weil überhaupt in absehbarer Zeit die Wortsprache immerhin das Hauptmittel des Gedanken*ausdrucks* sowie eine Hauptform des Gedanken*vollzuges* bleiben wird. Auch wir werden mit dieser Anlehnung zu beginnen haben (1. Vorlesung).

Nachdem nun aber in Gestalt von so vielen andern Disziplinen das Beispiel vorlag, wie förderlich es ist, sich für bestimmte Untersuchungsgebiete je eine eigene *Zeichensprache* zu schaffen und die fundamentalen Sätze dieser Disziplinen, unter Benutzung von Buchstaben als Symbolen, in allgemeine *Formeln* einzukleiden, hat nach einer langen Zeit verhältnissmässig unfruchtbarer Stagnation auch die Logik einen frischen Aufschwung genommen und sich in schon ziemlich zahlreichen neueren Bearbeitungen*) zu einer eigenen Buchstabenrechnung, einer *Algebra der Logik* entwickelt.

In dieser finden nun die Gesetze des folgerichtigen Denkens ihren denkbar schärfsten, kürzesten und übersichtlichsten Ausdruck, in ihr stellen sie sich in der konzisesten und knappsten Gestalt dar. Zugleich befreit uns die neue Zeichensprache von all' den Fesseln, in welche durch die Macht der Gewohnheit die Wortsprache den Menschengeist

*) Vergl. das Literaturverzeichniss am Schlusse.

geschlagen. Zufolge dieser Vorzüge ist die rechnerische Behandlung der Logik in der Lage, mancherlei Lücken der älteren blos verbalen Behandlungen nachzuweisen und auszufüllen, zuweilen auch Fehler derselben zu berichtigen, darunter solche von grösserer Tragweite, von fundamentaler Bedeutung.

Jener enge Anschluss an die Wortsprache hat nämlich für die älteren Behandlungen der logischen Disziplin erhebliche Gefahren gebracht, denen sie auch grossenteils zum Opfer fielen. Auch die gebildetsten Kultursprachen haben ja als die Produkte einer von zahllosen Zufälligkeiten beeinflussten Entwickelung viele und gewichtige Mängel, bestehend vor allem in der Übereinstimmung der üblichen sprachlichen Einkleidungsformen für wesentlich verschiedene Gedankenbeziehungen. Mit der dadurch so oft, ja regelmässig bewirkten Verhüllung des wahren Sachverhältnisses war es nahe gelegt, dieses selbst zu verkennen, seinen Unterschied von andern, mittelst gleicher Wortverbindung ausgedrückten zu übersehen — wogegen andrerseits an die Verschiedenheiten zugebote stehender verbaler Ausdrucksformen manch überflüssige Distinktionen geknüpft werden mochten. Der Zweideutigkeiten und Unbestimmtheiten zufolge schwankenden Gebrauches, der unsymmetrischen Einkleidung so vieler symmetrischen Verhältnisse, sowie der empfindlichen Abwesenheit von angemessen kurzen Ausdrucksformen für manche wesentliche und charakteristisch häufig wiederkehrende Beziehungen nicht zu gedenken.

Man wird hiefür in dem Buche als solche gekennzeichnete Belege genugsam finden.

Die *rechnerische Behandlung* der logischen Materie — zuerst von Leibniz[1] angeregt, dann auch von Lambert[2...5] und Ploucquet[1] verfolgt, ist in dem grundlegenden Werke „Laws of thought" zum erstenmal durch George Boole[4] zu einem in seiner Art nahezu vollständigen, auch auf die Lösung von Problemen zugespitzten Systeme ausgebildet worden.

Nahezu vollständig allerdings nur innerhalb jenes schon erwähnten Gebietes, welches, von Peirce als die „logic of absolute terms" bezeichnet, sich weiterhin von selbst schärfer charakterisiren wird. Wie schon angedeutet, beschäftigt sich diese Disziplin nur mit den alleräusserlichsten logischen Aufgaben, welche auch den Tummelplatz der alten Logik bilden, sofern diese etwa in der Lehre von den Syllogismen gipfelte. Naturgemäss muss indess die Erledigung dieser Aufgaben allen feineren Untersuchungen aus der Logik der Beziehungen überhaupt, es muss der „logic of relatives" die elementarere Disziplin vorangehen, so wie etwa die Geometrie der Mechanik und diese der Elasticitätslehre voraufzugehen hat.

Die Anlehnung an das Vorbild eines bereits bekannten Kalkuls, als welcher sich derjenige der arithmetischen vier Spezies naturgemäss in den Vordergrund drängte, hat allerdings auch seinerseits diesem ob zwar genialen und bewunderungswürdigen Systeme gewisse Übelstände aufgeprägt, von welchen es jedoch rasch genug durch neuere Bearbeiter gereinigt worden ist.

μ_3) Nun aber schien diese neuere Darstellung des gewichtigsten Inhaltsstoffes der (alten) Logik in einer eigenen Zeichensprache, in der Form eines *Kalkuls*, dem Althergebrachten ganz unvermittelt, schroff gegenüberzustehen. War sie doch auch nicht aus diesem unmittelbar herausgewachsen, sondern hatte sozusagen einen selbständigen Ursprung: Mathematiker zumeist, nicht Berufsphilosophen, hatten sie aufgebaut.

Kein Wunder, dass dieselbe im andern Lager ungemessenes Befremden*) erregte, verständnissvollem Entgegenkommen oft nicht begegnete, vielmehr manch' abfällige Beurteilung erfuhr, namentlich abseiten Solcher, die überhaupt keinen Kalkul beherrschen.

Zuzugeben ist, dass ein Übergang von dem älteren zum neueren System grösstenteils fehlte, und berechtigt war wenigstens das Verlangen, dass die Grundlagen des Kalkuls aus den Prinzipien der alten Logik abgeleitet und bewiesen würden — wohlbemerkt: *soferne dieses möglich ist* — ein Punkt, auf den ich zurückzukommen habe.

Die vermisste Brücke geschlagen zu haben ist nun das Verdienst der grundlegenden Arbeit[5] in Bd. III des American Journ. des Herrn Charles S. Peirce, zu welcher ihm, wie er sagt, Betrachtungen von Augustus de Morgan die Anregung gegeben haben.

Dasjenige vor allem, was uns in dieser Arbeit an Errungenschaften gesichert ist, desgleichen auch, was alsdann noch — und zum Teile unter seiner Leitung — Herrn Peirce's Schüler hinzugefügt haben, besonders in[1,1] Miss Ladd und Herr Mitchell — dieses zunächst habe ich mich bestrebt, in systematischer Darstellung zu einem wissenschaftlichen Systeme zu vereinigen.

Dass mir dabei nicht blos eine reproduzirende Thätigkeit zufiel, sondern ich auch kritisch und sichtend, lückenergänzend und schliesslich an dem

*) Jenem durch das Vermissen einer Brücke vom Einen zum Andern bedingten Befremden hat beispielsweise Hermann Lotze[1] in der „Anmerkung über logischen Calcül", durch welche sich die zweite Auflage seiner Logik von der ersten unterscheidet, in drastischer Weise Ausdruck gegeben — vergl. die Schlussworte seiner „Anmerkung".

Gebäude weiterbauend eingreifen durfte, wird schon ein flüchtiger Vergleich zeigen.

ν_3) *Einen* Unterschied zwischen der hier angestrebten und den früheren Behandlungsweisen der Logik möchte ich noch hervorheben, ohne jemand damit nahe treten zu wollen.

Suchen wir — was keine leichte Aufgabe ist — die vorgängigen Darstellungen der verbalen Logik zu überblicken, so scheinen dieselben uns stets nur aufzutreten mit einem schon in sich abgeschlossenen, einem *fertigen Bestande* von Lehren.

Für das richtige Verständniss, mitunter für ganz eigenartige Auffassung und Anordnung, für angemessene Wertschätzung und Anwendung ebendieser stereotypen Lehren plädiren solche Werke mit grossem Scharfsinn, oft gewandter Dialektik und mehr oder minder Verdienst und Glück. Mit grossem Verdienst auch pflegen sie den Leser einzuführen in die vorhandenen Streitfragen oder Kontroversen, unhaltbare Ansichten widerlegend, veraltende Distinktionen über Bord werfend und neue einführend, auch einen Einblick in die historischen Wandlungen philosophischer Anschauungsweisen eröffnend. Bald von der allgemein philosophischen und metaphysischen, bald mehr von der psychologischen Seite tragen sie wol Schätzenswertes zu einem Aufbau der Logik bei.

Was ich aber bei all diesem Anerkennenswerten *vermisse* ist, dass dabei mir nirgends zutage zu treten scheint, was denn etwa weiter noch zu thun und anzustreben wäre! In fühlbarem Gegensatze zu andern wirklichen Wissenschaften scheint mit der gegebenen Doktrin das Gebäude der logischen Disziplin allemal schon ganz vollendet dazustehen. —

Dagegen wird bei der rechnerischen Behandlung eine unbegrenzte Fülle ganz bestimmter Probleme sich zur Lösung darbieten: auch die Logik erscheint hier alsbald als eine Wissenschaft, die unbegrenzter Weiterentwickelung fähig, und ganz deutlich wird man, denke ich, die Punkte erkennen, wo zunächst die Hebel anzusetzen sind, an welchen fernere Arbeit einzusetzen haben wird, um ein weiteres Fortschreiten zu verwirklichen. —

Die Frage, wie nun wol das Verhältniss der verbalen zur rechnenden Disziplin aufgefasst werden soll, möchte ich dahin beantworten:

Herr Venn[1] ist der Ansicht, dass diese nicht bestimmt sei, jene zu verdrängen, sondern vielmehr als ein gewissermassen höherer Teil auf sie zu folgen habe. Hievon bin ich nicht allzuweit entfernt, nur

meine ich, dass diese überdies — auf Grund eben ihrer *vollkommnen Konsequenz* — von maassgebendem Einfluss auf die künftige Gestaltung jener werden sollte, im Sinne einer Annäherung, ihrer Anbequemung an sie.

Bei der Fülle von der verbalen Logik fremden, ja unzugänglichen Themata von Untersuchungen, auf die wir hier einzugehen haben, mussten naturgemäss manche verdienstliche Betrachtungen jener hier unberücksichtigt bleiben oder konnten solche nur flüchtig gestreift werden. Sollte in der That Alles, was mir anderwärts von Wert erscheint, hier aufgenommen sein, so müsste ich das Volum des Buches vervielfacht haben. Es kann deshalb nur wünschenswert genannt werden, dass der Studirende sich auch in der sonstigen zeitgenössischen Logikliteratur thunlichst umsehe, wozu ihm die Literaturangaben in unserm Verzeichnisse sowol als in gelegentlichen Noten Anregung geben und behülflich sein mögen.

ξ_3) Zum Schluss der Einleitung noch einige Worte über Wert und Nutzen der Logik überhaupt und damit auch der vorliegenden Studien.

Schon die Logik von Port-Royal[1] bemerkt, dass nichts schätzenswerter sei, als der gesunde Verstand und ein zutreffendes Urteil (le bon sens et la justesse de l'esprit) in der Unterscheidung dessen was wahr und was falsch ist. Während alle andern Eigenschaften des Geistes nur beschränkte Anwendungsgebiete besitzen, sei die Genauigkeit der Urteilsfunktion (l'exactitude de la raison) allgemein von Nutzen in allen Lagen und Verrichtungen des Lebens; denn nicht nur in den Wissenschaften, sondern auch bei der grossen Mehrzahl der Gegenstände (sujets), von denen die Menschen reden, und der Geschäfte, die sie treiben, sei es schwierig und von grösster Wichtigkeit, die Wahrheit vom Irrtum zu scheiden — eine Aufgabe, die dem Verstand obliege. Man solle deshalb vor allem darauf bedacht nehmen, die eigne Urteilskraft zu entwickeln (de former son jugement). Gewöhnlich bediene man sich des Verstandes als des Mittels, sich der Wissenschaften zu bemächtigen, aber man solle eher sich der Wissenschaften als eines Werkzeugs zur Vervollkommnung des Verstandes bedienen, da die Schärfe des letztern ohne Vergleich wertvoller sei als alle auch von den verlässigsten Wissenschaften erschlossenen Kenntnisse.

Und treffend hebt Mill hervor, dass bei weitem der grösste Teil unsres Wissens (allgemeinen sowol wie des besonderen) offenbar aus Folgerungen besteht. Folgerungen zu ziehen sei das grosse Geschäft des Lebens genannt worden. Ein jeder habe täglich, alle Augenblick,

Thatsachen zu prüfen, welche er nicht direkt beobachtet hat (und zwar nicht zu dem allgemeinen Zweck der Vermehrung seines Wissens, sondern weil die Thatsachen selbst für seine Interessen und Obliegenheiten von Belang sind). Alle haben gewisse Thatsachen zu bestimmen, sie aus gegebenen Wahrnehmungen oder Data zu schliessen, und daraufhin gewisse Regeln (vorschriftsmässig oder nach freiem Ermessen) anzuwenden, und je nachdem sie dies gut oder übel thun, erfüllen sie gut oder schlecht die Pflichten ihres Berufs. Die Logik zeige nun aber, welche Beziehungen stattfinden müssen zwischen den Daten und dem was aus ihnen geschlossen oder durch sie bewiesen werden kann. Darnach müsse sich in der Wissenschaft sowol, wie bei Führung seiner Geschäfte, ein jeder richten, bei Strafe, falsche Folgerungen zu ziehen, welche nicht in der Realität der Dinge begründet sind.

„Wenn es Regeln gibt, nach welchen sich jeder Verstand in einem jeden Falle, in welchem er richtig geschlossen hat, wissentlich oder unwissentlich richtet, so scheint es kaum nötig, zu erörtern, ob es wahrscheinlicher ist, dass Einer diese Regeln beobachten wird, wenn er sie kennt, als wenn er sie nicht kennt."

Eine Wissenschaft könne ohne Zweifel auf eine gewisse Höhe gebracht werden ohne die Anwendung einer andern Logik als derjenigen, welche alle Menschen, die einen gesunden Verstand besitzen, im Verlauf ihrer Studien empirisch erlangen. Es gebe aber eine gewisse Grenze sowol in Bezug auf das, was die Mechaniker ohne die Grundsätze der Mechanik, als auf das, was die Denker ohne die Grundsätze der Logik zu leisten vermögen. Wenn mehrere der schwierigeren Wissenschaften noch in einem so mangelhaften Zustand sind, dass in ihnen nicht allein so wenig bewiesen wird, sondern auch der Streit über das wenige „Bewiesene" nicht enden zu wollen scheint, so liege der Grund vielleicht darin, dass die logischen Begriffe der Menschen noch nicht jenen Grad von Ausbildung („Ausdehnung") und Genauigkeit erlangt haben, welcher für die Beurteilung der einschlägigen Beweise erforderlich ist . . .

So sehr wir diesen hier im Auszuge wiedergegebenen Ausführungen zustimmen, so möchten wir doch eine andere Rücksichtnahme in den Vordergrund stellen. Wir wünschen die logische Forschung überhaupt nicht vom utilitarischen, geschweige denn von einem kurzsichtig oder engherzig — um nicht zu sagen „bornirt" — utilitarischen Standpunkte aus beurteilt zu sehen. So verdiente aber ein Standpunkt genannt zu werden, der das Streben nach Zutageförderung und Erkenntniss der

Wahrheit nur dann als berechtigt anerkennte, wenn dieselbe einen unmittelbaren oder zum voraus schon erkennbaren Nutzen verspricht.

Wir wünschen, dass die Logik unter dem *wissenschaftlichen* Gesichtspunkte betrachtet werde. Höher als jede Aussicht auf etwaigen Nutzen der Disziplin steht uns ihr absoluter *Wert* als Selbstzweck — „Wert" als im Gegensatz zur „Nützlichkeit" — steht uns die Erforschung der für richtiges Schliessen maassgebenden Denkgesetze *um ihrer selbst willen.* Und welches *edlere* Ziel könnte sich der Intellekt auch setzen, als das: *sich selbst zu erkennen!* — somit die altehrwürdige Mahnung des Thales, das γνῶθι σεαυτόν des Weisen von Milet verwirklichend.

Nebenbei halten wir ja solches Forschen nach der Wahrheit um ihrer selbst willen auch für diejenige Taktik, die den Forderungen eines vernünftigen, weil hinreichend weit ausschauenden Utilitarismus am besten gerecht werden muss.

Die Geschichte der Wissenschaften zeigt es zur Genüge, wie erst durch dieses freie Walten des Erkenntnisstriebes, durch das reine, von allen Rücksichten des Eigennutzes, ja Nutzerfolges, losgelöste Streben nach Wahrheit, d. i. die Bethätigung eben des wissenschaftlichen Geistes, die allergrössten Entdeckungen ermöglicht wurden.

Wären z. B. nicht Jahrhunderte lang in diesem Geiste die Gesetze jener rätselhaften Kraft erforscht worden, mit welcher geriebener Bernstein, Harz etc. leichte Körper wie Korkstückchen, Papierschnitzel anzieht, wären sie nicht, wie gesagt, ohne jede Aussicht auf praktische Verwendbarkeit um ihrer selbst willen studirt worden, so würde auch die Entdeckung des elektrischen Telegraphen unmöglich gewesen sein; als aber jene so „unpraktisch" sich anlassenden Forschungen weit genug gediehen waren, lag dieselbe auf einmal so nahe, dass Mehrere darauf verfielen, war die Entdeckung — unbeschadet des Verdienstes Derer, welche wirklich die letzten Schritte vollführten — schon fast von selbst da.

Eine von diesem Geist beseelte Forschung möchten wir als die Hochpraxis bezeichnen gegenüber der nur auf greifbar praktischen Nutzen ausgehenden Niederpraxis. Hier vor allem dürfte es am Platze sein —, wie der volkstümliche Ausdruck fordert: „den grossen Glauben zu haben und nicht die grosse Eselsmeinung".

So trivial die obige Wahrheit in den Kreisen, die sich mit ernster Forschung abgeben, im allgemeinen glücklicherweise ist, ist sie doch gerade vonseiten Derer, welche die Logik zu kritisiren liebten, nicht hinlänglich gewürdigt, oft ganz ausser Augen gesetzt worden.

Wir zweifeln nicht, dass jene allgemeine Erfahrungsthatsache, welche als ein Gesetz aus der Geschichte der gesamten Wissenschaften hervorleuchtet, sich einst auch bei der Logik bewahrheiten wird, wofern diese nur erst in den richtigen Bahnen — wofern sie nur überhaupt einmal — *fortschreitet,* und nehmen wir das Vorrecht der gänzlich uninteressirten Forschung, das andern Wissenschaften zugestanden ist, auch für sie in Anspruch.

Gleich andern Wissenschaften dürfte auch die Logik einst ganz Ungeahntes verwirklichen und herbeiführen, dass nebenher in überraschender Weise auch unabsehbare Vorteile erzielt werden. Um nur auf eines hinzudeuten, so sind seit ihrem jüngsten Aufschwunge bereits drei „logical machines" neuerdings aufgebaut, die allerdings den ihnen beigelegten Namen noch kaum zu verdienen scheinen, die nämlich mit ihrer Leistungsfähigkeit sich noch auf einer sehr rudimentären Stufe befindlich zeigen — wie etwa der Papin'sche Topf gegenüber der Dampfmaschine. In der That aber vermag doch Niemand vorauszusehen, ob nicht schon bald eine „Denkmaschine" konstruirbar wird, analog oder vollkommner wie die Rechenmaschine, welche dem Menschen einen sehr beträchtlichen Teil ermüdender Denkarbeit fortan abnehmen wird, gleichwie die Dampfmaschine es mit der physischen Arbeit erfolgreich thut.

Freilich darf man die Ernte nicht schon während der Aussaat fordern, und am wenigsten da, wo Bäume gepflanzt werden.

Eigenart klar zum Bewusstsein gebracht haben, haben wir die Fähigkeit erworben, sind wir vorbereitet, die wahre *Bedeutung der Kopula* „ist" (oder „sind") zu erfassen, und uns nach einem geeigneten Beziehungszeichen zur Darstellung derselben umzusehen.

Die Kopula „ist" wird bald die eine, bald die andere der beiden Beziehungen ausdrücken, die wir mittelst der Zeichen $\subset$ und $=$ dargestellt haben. Zu ihrer Darstellung wird sich darum ein aus den beiden letzten zusammengesetztes Zeichen $\subseteq$ als ein ohne weiteres, sozusagen nunmehr von selbst, verständliches und dem Gedächtniss sich einprägendes vor allen andern empfehlen. Ausführlichst wird dieses Zeichen als *„untergeordnet oder gleich"* zu lesen sein. Und soferne sich herausstellen wird, dass den an unsern Beispielen gemachten Wahrnehmungen allgemeine Gültigkeit zukommt, können wir sagen:

Das kategorische Urteil drückt immer aus, dass das Subjekt (der Subjektbegriff) dem Prädikate (Prädikatbegriffe) entweder untergeordnet oder aber mit ihm identisch sei. Es wird demnach ursprünglich oder von hause aus:

$$\textit{Subjekt} \subseteq \textit{Prädikat}$$

gemeinsame Form aller kategorischen Urteile sein.*)

Indem wir nachher an dem Leitfaden ihres sprachlichen Ausdrucks die verschiedenen Arten kategorischer Aussagen möglichst vollständig durchgehen, werden wir in der That sehen, dass sich diese Behauptung durchaus bewahrheitet, dass die erwähnte Auffassung sich wenigstens *unbeschadet des logischen Gehaltes* der betreffenden Urteile überall anbringen, allgemein durchführen lässt — allerdings nicht selten bedingt durch eine Abänderung des „psychologischen Gehaltes" der betreffenden Urteile, sowie auf Kosten der Eleganz ihres sprachlichen Ausdruckes, unter Verletzung, mitunter auch, des Sprachgefühles, in einer Weise, die wol in der That den Eindruck, erkünstelt zu sein, hervorbringen kann. Lässt aber dadurch sich nur bewirken, dass alle Urteile in einer gemeinsamen Form erscheinen, und so einer *allgemeinen* Behandlung zugänglich werden, so ist durch die Erzielung solch' unabsehbaren Vorteils doch der gedachte modus procedendi vollauf gerechtfertigt.

Eine Behauptung der Form

1°) $$a \subseteq b$$

*) Zufolge der später zu vollziehenden Einführung, Adjungirung des Begriffs des „Nichts" wird die Wirksamkeit obiger Bemerkung für unsre Disziplin nachträglich eingeschränkt, sodass nicht alle Urteile in jener typischen Form der Subsumtion ihren angemessenen Ausdruck im Kalkul werden finden können.

werden wir eine *Subsumtion* (Einordnung) nennen, das Zeichen $\subseteq$ das *Subsumtionszeichen.* Dasselbe könnte auch das Zeichen der „eventuellen (oder fakultativen) Unterordnung" genannt werden, wo das Beiwort „eventuell" darauf anspielt und in der That lediglich darauf hindeuten soll, dass die Unterordnung auch in (identische) Gleichheit ausarten kann — im Gegensatz zu dem Zeichen $\subset$ der wirklichen oder definitiven Unterordnung, „der Unterordnung" schlechtweg.

Die linke Seite a der obigen Subsumtion heisst auch der *Unterbegriff* oder *terminus minor* derselben, die rechte Seite b ihr *Oberbegriff* oder *terminus major.* [Nebenbei bemerkt sind das Benennungen, die ganz ebenso auch bei der Unterordnung $a \subset b$ anwendbar erscheinen.] Ich werde indess diesen Benennungen in der Regel die einfacheren *„Subjekt"* und *„Prädikat"* selbst vorziehen, und zwar auch auf einem solchen Felde der Anwendung von Subsumtionen, welches mit diesen der Grammatik (spezieller der Satzlehre oder Syntax) entlehnten Gebilden anscheinend nichts zu thun hat, z. B. wenn wir später unter a und b in 1°) uns „Gebiete einer Mannigfaltigkeit" vorzustellen haben.

Wir konnten in unsern typischen Exempeln die Subsumtion 1°) *in Worten* durch den Satz darstellen:

„a ist b"

oder auch *„alles a ist b"*. Bei der ersteren Fassung muss man bleiben, wenn das Subjekt a — der Einzelvorstellung entsprechend — ein Individuum bedeutet, das ist also bei den sogenannten *„singulären"* Urteilen. Z. B. „Mars ist Planet", was logisch dasselbe sagt, wie: „Der Mars ist ein Planet".

Je nach dem sprachlichen Ausdruck des Subjektes werden aber für die Kopula mitunter auch andere Formen, wie z. B. die Pluralform „sind" zu wählen sein. So namentlich, wenn es sich um Arten und Gattungen handelt, z. B.

„(Alle) Säugetiere sind Wirbeltiere".
„(Alle) Zweihufer sind Wiederkäuer".

An diesen als den wol häufigeren Fall wollen wir uns bei den nächsten Besprechungen vorzugsweise halten.

Gegenüber den einfachen Zeichen $\subset$ und $=$ drückt das zusammengesetztere Zeichen $\subseteq$ (wie schon Peirce betont) *gleichwol die einfachere Beziehung aus.* In der That die Subsumtion

1°) $$a \subseteq b$$

sagt *weniger*, wie die Unterordnung, resp. Gleichung

2°) $a \subset b$, 3°) $a = b$.

hingestellt, würde jene Relation dann allerdings noch richtig bleiben, jedoch weniger sagen, wenn man das Zeichen $<$ in $\leq$, statt als „untergeordnet", nun als „kleiner" interpretirte. Sooft aber solche Relation $A \leq B$ als *Voraussetzung* hinzustellen wäre, müssten die beiden fraglichen Interpretationen von $<$ einen Unterschied geben: es wäre im erstern Falle die Annahme „A kleiner als B" durch die Relation ausgeschlossen, im zweiten aber zugelassen. Und anderes mehr.

Unstreitig wird es also praktischer sein, für die Unterordnung ein von dem Zeichen $<$ *verschiedenes* Zeichen zu wählen. Wenn nun dieses fragliche Zeichen mit Rücksicht auf die Anforderung, dass dasselbe beim Vor- und Rückwärtslesen mnemonisch interpretirbar sei, ebenfalls zwei divergirende Äste besitzen soll, so müssen dieselben gekrümmt genommen werden, und bleibt (bei Wahrung der Symmetrie des Zeichens in vertikaler Richtung, d. i. um die horizontale Axe) gewissermassen nur die Möglichkeit übrig, dasselbe dem von uns gewählten *Parabel-* (oder Hyperbel)bogen ähnlich zu gestalten — in Anbetracht, dass ein Zeichen wie

$$\prec$$

bereits vergeben erscheint, nämlich nach Paul Du Bois Reymond's Vorschlag eine eigentümliche Verwendung zur Darstellung infinitärer Beziehungen bereits gefunden hat und auch am besten findet.

Man könnte höchstens noch unserm Zeichen anstatt des Scheitels eine Ecke geben: $<$, wodurch es sich aber weniger deutlich von dem Zeichen $<$ abheben würde — ein Punkt indess, über den ich mit niemand streiten will. [Verwendeten wir statt des Parabelbogens einen *Kreis*bogen, so würde dadurch ein oft störender Parallelismus mit etwaigen Klammerhaken der hinter das Zeichen tretenden Ausdrücke bewirkt werden.]

Das Zeichen $\subset$ wurde 1873 von mir eingeführt[1]. Umfassende Anwendungen von den durch dasselbe ausgedrückten Beziehungen der Subsumtion möchten wol l. c. zum ersten mal auf (sozusagen) extralogischem Gebiete gemacht sein. Ich habe jenes mit noch einem andern Zeichen, auf das wir einzugehen haben werden, daselbst verwendet, um ein geschmeidiges Rechnen mit vieldeutigen Zahlenausdrücken auszubilden, Prinzipien und Methoden für solches zu entwickeln.

Herr Peirce verwendet dafür das in Amerika bereits ziemlich eingebürgerte Zeichen

$$\prec,$$

welches allerdings drei Jahre früher von ihm eingeführt worden ist; doch haben *vor* ihm auch Augustus De Morgan und Andere sich schon besondrer von den angeführten differirender Zeichen für die gedachte Beziehung bedient.

Ich meine, dass nicht Rücksichten auf die mehr oder weniger zufällige Priorität eines Bezeichnungsvorschlages, sondern lediglich sachliche Zweckmässigkeitsrücksichten den Ausschlag dafür geben sollten, welcher Vorschlag etwa allgemein anzunehmen wäre. In dieser Beziehung könnte ich schon die vorstehende Auseinandersetzung für sich selbst reden lassen. Besonders möchte ich jedoch noch darauf aufmerksam machen, dass ein vorgeschlagenes Beziehungszeichen nicht blos *für sich allein* in Betracht zu ziehen ist, sondern

auch als ein Glied eines vollständigen Systems von Zeichen für *sämtliche* logischen Grundbeziehungen. Sollten letztere — immerhin, wie wir sehen werden, *zehn*, oder, wenn man die vor- und rückwärts verschieden aussehenden gesondert zählt, *vierzehn* an Zahl — überhaupt planmässig, rationell bezeichnet werden — und dies erscheint bei ihrer grossen Anzahl durchaus wünschenswert — so wird sich zeigen lassen, dass mein Vorschlag nicht nur zweckentsprechend, sondern auch fast der einzige ist, der thunlich erscheint. Vergl. die spätere Besprechung der sämtlichen Zeichen in § 34 sq.

Jedenfalls dürfte sich's empfehlen, auf die Gestaltung neu einzuführender Zeichen eine grosse Sorgfalt zu verwenden. Denn ist ein ungeschickt gewähltes Zeichen einmal wirklich eingebürgert, so möchte wol eine Abhülfe kaum minder schwierig durchzuführen sein, als etwa der Plan, den Schienenweg, Fahrdamm einer unzweckmässig gelegten Eisenbahnlinie wieder in fruchtbares Ackerland zu verwandeln!

Ich schliesse diesen Exkurs mit der Anführung eines in der Übersetzung von mir etwas gemilderten Ausspruchs von A. De Morgan, nach Peirce's von mir geteilter Ansicht, eines der scharfsinnigsten Logiker, die existirten. Derselbe stellt am Schlusse seines Syllabus[2] die beiden folgenden Thatsachen einander gegenüber.

Erstens: die Logik ist die einzige Disziplin, welche seit dem Wiederaufleben der Wissenschaften (since the revival of letters) keine entsprechenden Fortschritte gemacht hat.

Zweitens: die Logik, ganz allein, hat keinen Zuwachs an Zeichen (symbols) hervorgebracht.

Er sagt geradezu „*keine* Fortschritte", was bekanntlich auch Kant mit aller Schärfe behauptet.

§ 2. Vorläufige Betrachtungen über Darstellbarkeit der Urteile als Subsumtionsurteile.

Es erübrigt uns noch, nachzusehen, inwiefern *jedes* Urteil als ein „Subsumtionsurteil" angesehen werden kann. Zunächst wenigstens wird dies für die kategorischen Urteile zu zeigen sein.

Für nicht-kategorische, nämlich die aus verschiedenen Teilsätzen mittelst Konjunktionen — wie: *„wenn .., so ..", „entweder .., oder", „weder .., noch", „nicht nur .., sondern auch ..", „folglich", „weil"*, und andere — zusammengesetzten Urteile kann erst im Lauf der Entwickelung unsrer Theorie nach und nach dargethan werden, dass und auf welche Weise sie ihrem logischen Gehalte nach vollständig darstellbar sind mit Hülfe des Subsumtionszeichens selbst oder auch anderer Zeichen, deren Bedeutung jedoch auf den Subsumtionsbegriff zurückführbar ist, welche sich in der That aus dem letztern ableiten, auf Grund desselben definiren lassen.

Als „Ding" oder Objekt des Denkens, von welchem in einem Satze etwas ausgesagt wird, und welches demnach dessen „Subjekt" bildet, kann auch ein selber als Satz formulirtes *Urteil* auftreten und ebenso kann dasjenige, was von jenem prädizirt wird, bestehen in der Hervor-

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Dritte Vorlesung.

§ 5. Die identische Multiplikation und Addition. Peirce's analytische Definition von Produkt und Summe.*)

Wir müssen uns nunmehr mit *Operationen* bekannt machen, durch welche aus (zunächst) zwei Gebieten a, b jeweils ein drittes Gebiet abgeleitet werden kann, aus zwei Klassen eine dritte (später dann auch aus mehreren solchen eine neue). Zwei wichtigste von solchen Operationen bezeichnen wir als *identische Multiplikation* und als *identische Addition*, und entlehnen — der Einfachheit wegen — Namen und Bezeichnungsweise für die Operationsergebnisse und die dazu verknüpften Operationsglieder aus der Arithmetik von den gleichnamigen arithmetischen Operationen.

Erfahrungsmässig hat dies Verfahren einen gewissen Widerstand zu gewärtigen; dasselbe wird nicht von jedermann ohne weiteres gebilligt und acceptirt. Es werden deshalb einige Worte zu seiner Rechtfertigung am Platze sein, sowie Fingerzeige, wie dasselbe da wo es ungeeignet erscheinen sollte, zu modifiziren sei.

Mit dem Malzeichen, z. B., und dem Namen „Produkt" die Vorstellung einer *arithmetischen* Multiplikation zu verknüpfen, ist durch jahrhundertelangen Gebrauch sanktionirt, und von dieser langgewohnten und berechtigten Gedankenverbindung zwischen Namen und dem durch sie Benannten sich hier stets frei zu halten wird in der That dem Leser zugemutet erscheinen, wenn wir wirklich jene Namen und Zeichen aus der Arithmetik in unsre Disziplin herübernehmen. Bedeuteten die zu einem Produkt $a \cdot b$ oder ab zu vereinigenden Symbole a und b hier Zahlen oder auch Klassen, Gattungen von Zahlen, so wäre die Zumutung allenfalls eine harte zu nennen.

Solches ist nun aber *nicht* der Fall. Freilich, da uns a und b Klassen von *irgendwelchen Dingen* oder Objekten des Denkens vorzustellen haben werden, so ist ihre Interpretation als *Klassen von Zahlen* nicht gerade prinzipiell ausgeschlossen. Doch bildet letztere gegenüber den sonst hier im allgemeinen beabsichtigten Deutungsweisen ein Anwendungsfeld von sehr speziellem Charakter und verhältnissmässig untergeordneter Wichtigkeit. Für dieses, wenn es überhaupt in Betracht gezogen werden sollte, kann man sich leicht gewisse Kautelen, eine besondere Behutsamkeit in der Verwendung der Namen und Zeichen, als logischer (identischer) oder aber

---

*) Wird bezüglich der Berechtigung, die fragliche Definition Herrn Peirce (und nicht Herrn McColl) zuzuschreiben, der Rückblick im § 54, zweite Abteilung des Bandes 2 zu vergleichen sein.

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

um hinreichend ausdrucksvoll und durch sich selbst verständlich zu sein, die Symbole a und b, denen es entstammt, doch selber enthalten, sie irgendwie miteinander verknüpfen muss. Die simpelste Verknüpfung von Zeichen ist eben das Nebeneinanderstellen derselben auf der Zeile, und der Vorteile, die aus solcher Einfachheit erwachsen, sind wir nicht gesonnen, uns unnötigerweise hier zu entschlagen. Zudem stellt auch die Wortsprache selbst (wie in § 8 zu sehen) die Namen der als identische Faktoren zu einem Produkt zu verknüpfenden Klassen in der Regel ohne weiteres Verknüpfungszeichen oder Bindewort nebeneinander.

Ähnliches aber, wie oben in Bezug auf das Produkt ausgeführt ist, liesse sich grösstenteils auch hinsichtlich der Summe sagen.

Nur dann, wenn Anwendungen des identischen Kalkuls auf die Arithmetik selbst beabsichtigt sein sollten — dergleichen uns hier meistens ganz ferne liegen — wird es ratsam die *„arithmetischen“* und die *„identischen“* Operationen, Operationsglieder und Operationsergebnisse jeweils im Texte durch die kursiv gedruckten Beiwörter sorgfältigst zu unterscheiden, eventuell auch mittelst *verschiedener* Knüpfungszeichen die einen und die andern zu kennzeichnen. Ganz unerlässlich würde letzteres erscheinen, wenn etwa im selben Ausdruck oder in der nämlichen Formel die beiderlei Operationen gleichzeitig vorkommen sollten.

Hier aber ist es leicht, gedachte Unterscheidung der arithmetischen und der gleichnamigen identischen Knüpfungszeichen irgendwie, in einer ad hoc konventionell festzustellenden Weise, zu bewirken. Man klammere etwa die Zeichen der seltener vorkommenden Sorte von Operationen ein: $(\cdot)$, $(+)$, oder drucke sie hohl, fett, kursiv und dergleichen.

Bei der Multiplikation ist man in der günstigen Lage, ohnehin über zwei Knüpfungszeichen zu verfügen. Man reservire z. B. den Punkt, $\cdot$, für die identische, das liegende Kreuz, $\times$, für die arithmetische Multiplikation und beobachte die Rücksicht, dass alsdann nur das eine von diesen beiden Zeichen auch ungeschrieben bleiben, bequemlichkeitshalber unterdrückt werden darf, nicht aber auch das andere — indessen, je nachdem es zweckmässig erscheinen mag, durchweg das erste oder durchweg das zweite.

Für identische Addition wird man praktisch auch ein stehendes Kreuz $\dagger$ gegenüber dem arithmetischen $+$ in solchen Fällen verwenden, wie uns denn hier — dank der Liberalität des Verlegers — kleinere $+$ Zeichen $+$ und $+$ zu gebote stehn.

Überdies ist zu beachten, dass wo immer Anwendungen der geschilderten Art beabsichtigt sein sollten, auch die „identische“ Null und Eins — etwa durch kursiven Druck als *0, 1* oder aber mittelst Apostrophirung etc. — von den Zahlindividuen 0, 1 unterschieden werden müssen — vergl. § 9, ω). —

In einem seiner Aufsätze [1a] verwendet Herr Peirce durchweg einmal als *Malzeichen* das *Komma*, für identische Gleichheit ein Gleichheitszeichen mit darunter gesetztem Komma, und für identische Addition ein $+$ mit in den Winkelraum rechts unten eingefügtem Komma $+_{,}$. Das ganze Bezeichnungssystem erscheint schon ein bischen schwerfällig, das erstere aber auch höchst bedenklich, weil man in Text wie in Formeln [z. B. bei

$f(a, b, c, ..)$] dann nie unterscheiden kann, ob $a, b, c, ..$ eine Gruppe, ein System von *mehreren* Symbolen, oder aber *ein einziges* Symbol — das Produkt der letztern — vorstelle. Von diesem System der Schreibung kommt Peirce auch selbst wieder in seinen späteren Aufsätzen — und wie es scheint, definitiv — zurück. Im schriftlichen Arbeiten mag aber das Zeichen $+$, sich zuweilen empfehlen.

Neue Zeichen und Namen zu erfinden ist ja in der That nicht schwer, und was die Namen betrifft, so hat gerade die Philosophie hierin die Welt schon mit grossartigen Leistungen beglückt.

Wollten wir vor der bei der Arithmetik zu machenden Namenanleihe zurückschrecken, so würden auch wir genötigt sein, ein ganzes Heer von neuen Namen zu erfinden. Es würde bei weitem nicht genügen, neben eigenen Zeichen zur Vertretung unsrer (von Boole schon eingeführten) 0 und 1, etwa blos für „Multiplikation, Faktor, Produkt" und „Addition, Summand, Summe" neue Namen zu schaffen. Als solche wurden — nebenbei gesagt — bereits „Composition, Componenten, Compositum („compound")" und „Aggregation, Aggreganten, Aggregat"*) von Augustus de Morgan[2,3] verwendet. — Es würde überdies die Folge sein, dass wir das Summenzeichen Σ, das Produktenzeichen Π durch andere Zeichen ersetzen müssten, dass wir zeitweilig neue Namen einzuführen hätten auch eventuell für „Potenz", für „Division, Quotient, Dividend und Divisor", für „Subtraktion, Differenz, Minuend und Subtrahend", für „Abziehen" und „Vermindern", für „mal, plus, durch und minus", und ausserdem noch für eine Menge anderer Kunstausdrücke. Ich erinnere an „Monom, Binom, Trinom, Polynom", an „Koeffizient", an „Ausmultipliziren" (nach der Multiplikationsregel für Polynome) und „Ausscheiden" (eines gemeinsamen Faktors), an die Benennungen „Funktion" und „Argument", an „linear" und „homogen" (in ihrer Anwendung auf den Funktionsbegriff), u. s. w.

Ein Blick auf den weiterhin dichter werdenden Formelinhalt dieses Buches wird schon erkennen lassen, wie viel umständlicher und schwerfälliger derselbe sich darstellen müsste, wollten wir nur überall da, wo ein Malzeichen *steht oder gesetzt zu denken, zu unterstellen ist*, ein ausdrückliches Knüpfungszeichen anbringen!

Erstrebenswerter als solche Neuerungen scheint es doch zu sein, mit einer schon vorhandenen Nomenklatur, die sich auch unsern eigenartigen Zwecken vorzüglich anpasst, haushälterisch auszukommen. Weigerten wir uns dessen, so würde aber die schlimmste Wirkung die sein, dass wir genötigt wären, eine Menge aus der Arithmetik der vier Spezies allbekannter Sätze in dem fremdartigen Gewand, das sie alsdann notwendig zeigen müssten, vollständig neu zu lernen. Bei dem Plan, den wir hier lieber befolgen, haben wir dagegen den Vorteil, nicht nur, dass die zahlreichen Analogieen und die minder zahlreichen Gegensätze zwischen dem identischen und dem arithmetischen Kalkul auf das klarste zutage treten, sondern dass wir auch einen ansehnlichen Teil unsrer Übung aus der allgemeinen Arithmetik (freilich nur von der Tertia eines Gymnasiums her) hier ohne weiteres

*) Indess der letztere Name ist ja auch in der Arithmetik bereits vergeben!

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Dies alles ist auch direkt nach Def. (3) ersichtlich. — Das Symbol ab resp. $a+b$ ist demnach in der That selbst dasjenige „Gebiet" c, welches die Voraussetzungen der als Theoreme 7) und 9) ausgesprochenen Definitionen gleichzeitig erfüllt.

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen können wir nun sagen: *Die Operationen der identischen Multiplikation und Addition sind niemals undeutig und niemals mehrdeutig, vielmehr unbedingt ausführbar und eindeutig* — oder, wie ich zusammenfassend es ausdrücken will: *sie sind „vollkommen eindeutige"* innerhalb der durch Zuzug der Symbole 0, 1, ab, $a+b$ vielleicht erweiterten Mannigfaltigkeit von „Gebieten".

Dass ab in der That eines Wertes nie ermangeln kann, wenn man schon den Namen ab selber als „Wert" gelten lässt, erscheint selbstverständlich: eine solche Definition verbürgt zugleich die Existenz des Definirten. Dass ab nicht mehrere Werte haben kann, zeigte der Zusatz zu Th. 11). Analog bezüglich des $a+b$.

Worauf es hier besonders ankam, war: zu sehen, dass die Aufnahme der neuen Symbole unter die „Gebiete" im Grunde schon dadurch vollzogen wurde, dass man das Identitätsprinzip I auf sie anwendete, beziehungsweise ausdehnte.

Indem man nunmehr für c sogleich den Namen ab resp. $a+b$ gebrauchte, würden die beiden Theoreme 7) und 9) augenscheinlich zu einem Satze zusammenfliessen, der sich völlig deckt mit der alten Definition (3) — nur dass es jetzt „jedes c" anstatt des dortigen „gewissen" c hiesse.

Dergestalt im Ringe herum gegangen kämen wir somit wieder zu unserm Ausgangspunkte zurück.

Diesen Satz, Def. (3), stellt Herr Peirce einfach als „Definition" von ab resp. $a+b$ hin.

Dass er aber solche Definition nicht blos für die einseitige Verwendung (als major *resp.* minor) sondern in der That vollständig enthält — dies durch die hier gegebene Zergliederung nachgewiesen zu haben, dürfte wol nicht überflüssig gewesen sein. —

§ 7. Deutung von 0, 1, ab, $a+b$ als Gebiete nebst zugehörigen Postulaten. Konsistente Mannigfaltigkeit.

Wir schreiten jetzt dazu, das im Bisherigen abstrakt Definirte zu veranschaulichen, zu deuten.

Solange es ununtersucht gelassen wird, ob es „eigentliche" Gebiete gebe, welche die von den Symbolen 0, 1, ab, $a+b$ geforderten Eigenschaften besitzen, konnten wir sagen, dass unsre Definitionen die

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Bedeutet nun also a irgend eine Klasse, wie „schwarz“ oder „Gold“, etc., so dürfen wir Subsumtionen wie

$$0 \Subset a, \qquad a \Subset 1$$

jedenfalls nicht mit:

„Nichts ist Gold“ resp. „Gold ist Alles“

übersetzen, obgleich 0 nichts und 1 alles Denkbare bedeutet, resp. auf unserm gegenwärtigen Standpunkte noch bedeuten kann.

Die Übersetzung dieser Subsumtionen in die Wortsprache ist überhaupt *unnötig*.

Will man sie aber dennoch ausführen, so ist etwa, wie oben (unter ϱ), die erstere mit „Das Nichts ist Gold, ist schwarz, etc.“ wiederzugeben — vergleiche „das *goldene Nichts*chen und das silberne Warteeinweilchen“ des Volkswitzes im deutschen Sprichwörterschatze.

Bei geeigneter Betonung würde sich sogar die oben zurückgewiesene, refutirte Aussage aufrecht erhalten lassen. Falsch ist sie nur in der *gewöhnlichen* Betonung: „*Nichts* ist schwarz“, welche an den Tonfall des Daktylus: – ⏑ ⏑ wenigstens erinnert. Richtig dagegen (in unserm Sinne) wäre sie mit der ungewöhnlichen Betonung: „Nichts. . . ist *schwarz*“ (es ist ja ebensogut auch weiss) mit dem Tonfall des Amphimacer oder Kretikus: – ⏑ –, und einer Pause hinter der ersten Länge.

Wird 0 anstatt durch „nichts“, durch ein Produkt dargestellt, das 0 zum Werte hat, so kann die gewöhnliche Ausdrucksweise wieder Platz greifen. Da z. B. die Klasse „rundes Quadrat“ = 0 ist, so wäre es wenigstens unverfänglich zu sagen: „alle runden Quadrate sind schwarz“ und dergl.

Am besten sage man etwa: das Nichts ist in Allem, so auch in der Klasse a noch mitenthalten.

Die zweite Subsumtion: $a \Subset 1$ liesse sich übersetzen mit: „Gold ist etwas“, „Schwarze Dinge sind etwas“, etc. indem das unbestimmte Pronomen „etwas“ die Klasse vorstellt, die alles Denkbare unter sich begreift, *alles, wovon man überhaupt zu reden vermöchte.*

Es würde diese allumfassende Klasse entsprechen dem von Boole in die Logik eingeführten „Universum des Diskussionsfähigen“ (universe of discourse), Jevons' und R. Grassmann's „Totalität“ oder „All“.

Ob es aber angängig ist, eine so umfassende Klasse überhaupt zu bilden, die unter anderm auch die Ableugnung ihrer eigenen Zulässigkeit, die Verneinung ihrer Existenz mitenthalten müsste, ob wir diese hier als Bedeutung unsrer identischen 1 (Peirce's ∞) beilegen dürfen, soll gleich nachher noch eingehender untersucht werden.

φ) Nach dem Bisherigen dürfte es beinahe überflüssig sein, noch besonders darauf hinzuweisen, dass auch die Subsumtion

$$0 \Subset 1$$

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

flüssig zu betonen, dass sie von der arithmetischen 1 unterscheidend bezeichnet werden müsse.

Sind a, b lineare oder Flächen- oder Raumgebiete und als solche durch ihre Begrenzung gegeben, so würde es nach den in Herrn Otto Bödicker's „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen" etc. (Stuttgart, Spemann 1876, 68 Seiten) entwickelten Methoden nicht schwer fallen, die Maasszahlen $(a+b)'$ und $(ab)'$ ihrer identischen Summe und desgl. Produktes durch Integrale darzustellen, erstreckt über die Gebiete a, b selbst oder ihre Umgrenzungen.

Wenn sonach die Analogie der identischen beiden Grundoperationen mit ihren arithmetischen Namensverwandten keine tiefgehende ist, so tritt dafür eine sehr weitgehende Analogie jener beiden mit gewissen komplizirteren arithmetischen Operationen zutage, die wir nur kurz anführen wollen: die identische *Multiplikation* verhält sich ihrem ganzen Wesen nach durchaus ähnlich, wie die Operation der *Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors* oder Teilers gegebener Zahlen und die identische *Addition* entspricht ebenso der *Aufsuchung ihres kleinsten gemeinschaftlichen Multiplums* oder Vielfachen.

In der That könnte man hinstellen: das *identische Produkt* von Gebieten als das *grösste* denselben *gemeinsame Gebiet*, als das umfassendste von all' den Gebieten, welche ihnen gemein *sind*; desgleichen die *identische Summe* von Gebieten als das *kleinste* von all' den Gebieten, die ein jedes von den gegebnen in sich enthalten, als das mindest umfassende also von denen, die diese alle gemein *haben*.

Die Wahrnehmung dieser auch Herrn Georg Cantor nicht entgangenen Analogie hat in der That Herrn Dedekind veranlasst, in seiner schon erwähnten Abhandlung[1] unser identisches Produkt ab, welches er die „*Gemeinheit*" von a und b nennt, mit $\mathfrak{G}(a, b)$, unsre von ihm die „*Zusammensetzung*" genannte identische Summe $a+b$ mit $\mathfrak{M}(a, b)$ darzustellen. Da diese Bezeichnung unstreitig etwas schwerfälliger erscheint, wie die unsrige, so möchte ich, sogar bei logisch-arithmetischen Untersuchungen gemischter Art, unterscheidenden Knüpfungszeichen, z. B. für die identische Addition einem erheblich kleineren Pluszeichen im allgemeinen den Vorzug geben. Eventuell, namentlich für schriftlichen Gebrauch, dürfte es sich in solchen Fällen auch empfehlen gemäss Herrn Peirce's zeitweiliger Übung eines Pluszeichens mit in die Ecke rechts unten gesetztem Komma $\dot{+}$, als identischen Knüpfungszeichens sich zu bedienen zur Unterscheidung vom einfachen als dem arithmetischen $+$Zeichen — wobei dann auch die Summen und Produktzeichen Σ, Π, wenn als identische (nicht arithmetische) zu deuten, mit einem *Komma* als Apostroph nur zu versehen wären, gleichwie erforderlichenfalls die 0 und 1 — vergl. S. 193 sq.

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Aus den zwei letzten Subsumtionen folgt nach $(3_\times)'$: $(ab)c \Subset bc$, und hält man mit dem vorhergehenden Ergebniss $(ab)c \Subset a$ dies letztere zusammen, so ergibt sich wiederum nach $(3_\times)'$

$$(ab)c \Subset a(bc).$$

Hienach haben wir, kraft $(3_+)'$:

$$b+c \Subset (a+b)+c,$$

und da oben bereits

$$a \Subset (a+b)+c$$

gefunden ist, folgt endlich nach (3_+) weiter:

$$a+(b+c) \Subset (a+b)+c.$$

q. e. d.

Die vorstehenden Beweise der Assoziationsgesetze bilden meines Erachtens eine der schönsten Leistungen des Herrn Peirce.

Exempel zu dem Satze. Die Gebildeten (a) unter den adeligen Grundbesitzern (bc) sind die gebildeten Adligen (ab) unter den Grundbesitzern (c).

Gebildete oder auch Adelige $(a+b)$ nebst den Besitzenden (c) sind dieselbe Klasse von Personen, wie Gebildete (a) nebst den Adeligen oder auch Besitzenden $(b+c)$.

Exemplifikationen zu 13_+) sind in der Wortsprache nicht leicht ausdrucksvoll darzustellen, weil in dieser ja Klammern nicht verwendet werden und, wo sie doch der Deutlichkeit wegen erforderlich wären, deren mentale Ergänzung höchstens durch die Betonung nebst geeigneten Pausen, durch den Rythmus der Rede angedeutet zu werden vermag. Im vorliegenden Falle jedoch pflegt die Wortsprache — ohnehin gerechtfertigt durch die Theoreme 13) selbst, vergl. die nachfolgenden Zusätze und Zusatzdefinitionen — bei der additiven Vereinigung oder kollektiven Zusammenfassung von drei oder mehr Klassen dieselben stets unterschiedslos, eventuell durch Konjunktionen wie „und", „sowie", „oder" verknüpft hintereinander aufzuzählen; sie pflegt die Theoreme 13) allgemein dahin zu verwerten, dass sie es sich erspart, sich schenkt, Ausdrucksformen für Unterschiede aufzustellen, die ohnehin belanglos sind.

Zusatz 1) und Zusatzdefinition.

Die konsequente Ausdehnung der vorstehenden *speziellen* Kommutations- und Assoziationsgesetze zu den gleichnamigen *allgemeinen* Sätzen, welche sich auf beliebig viele Operationsglieder beziehen, ist nun geradeso, wie in der Arithmetik, zu leisten.

Es würde in diesen Prozess der Verallgemeinerung, hier wie dort, nur das Th. 16) noch mit hereinzuziehen sein.

Die verallgemeinerten Sätze lassen sich zu dem Ausspruche zusammenfassen, dass bei der Verknüpfung beliebig vieler Symbole durch lauter Multiplikationen resp. lauter Additionen die Reihenfolge oder *„Ordnung"* und die *„Gruppirung"* oder Zusammenfassung dieser Operationsglieder *gleichgültig* ist, insbesondre also auch Klammern nach Belieben gesetzt oder unterdrückt werden dürfen.

stens in gegenwärtiger Disziplin, in welcher wir übereingekommen sind, das Nichts in jeder Klasse, so auch in derjenigen der schwarzen Dinge mitenthalten zu denken.

22_+) Was schwarz oder irgend etwas ist, muss eben nur irgendetwas sein, und umgekehrt: Alles ist schwarz oder (sonst) irgend etwas.

Das Wort „nichts" könnte in vorstehenden Sätzen auch teilweise oder durchweg durch „ein rundes Quadrat" z. B. ersetzt werden.

Wir sehen, dass für die Sprache des gemeinen Lebens höchstens wol die Theoreme $22_\times$) und 21_+) beanstandet werden können, aber *nur* diese — durchaus nicht 22_+). Jene sind dort in der That cum grano salis zu nehmen.

Dem *Mathematiker* dagegen, der seine bei den Zahlen erworbenen Gewohnheiten in den identischen Kalkul unbesonnen herübernähme, müsste das Theorem 22_+) allein anstössig erscheinen. Die drei andern von den in Rede stehenden Theoremen konstatiren ja Formeln, die auch in der Arithmetik allgemeine Geltung haben.

Und der Umstand, dass die identische 0 *die (beiden) Grundeigenschaften* $a \cdot 0 = 0$ und $a + 0 = a$ mit der arithmetischen gemein hat, rechtfertigt es zweifellos, dass wir der Arithmetik das Zahlzeichen 0 behufs Darstellung unsres Nullgebietes, des absoluten „Nichts", entlehnten.

Dagegen vereinigt die „identische 1" in sich die Grundeigenschaft der arithmetischen 1, dass $a \cdot 1 = a$ ist, mit einer solchen „der absoluten Unendlich", gemäss welcher in der Mathematik $a + \infty = \infty$ gilt.

In rein formaler Hinsicht würde darnach ein aus 1 und ∞ zusammengesetztes Zeichen, wie etwa:

$$\Phi$$

wol als das geeignetste erscheinen, um Dasjenige vorzustellen, was ich hier „die identische Eins" nenne.

Will man aber statt eines besondern Zeichens (wie Jevons' „Universe" U, R. Grassmann's „Totalität" T) der Einfachheit wegen eines der beiden Zeichen 1 und ∞ selbst hiezu verwenden, so gibt die formale Hinsicht keinen Ausschlag, welches von den beiden etwa vorzuziehen wäre.

Nun haben Boole und Andere stets, auch Herr Peirce früher, nur das Zeichen 1 benutzt. Neuerdings jedoch hat sich letzterer samt seiner Schule — sekundirt durch Wundt[1] — für das Zeichen ∞ entschieden, sodass den Genannten also $a \cdot \infty = a$ gilt!

In sachlicher Hinsicht mag hiebei wol die Überlegung ausschlaggebend gewesen sein, dass das fragliche Zeichen die *ganze* Mannigfaltigkeit, auf deren Gebiete die Untersuchungen spielen, vorzustellen hat, und diese *häufig* „eine unendliche" ist, nämlich, wenn sie auch nicht immer ein unbegrenztes oder unendlich grosses Gebiet vorstellt, doch wenigstens unbegrenzt viele Elemente enthält. So enthält ja in der That die durchaus endliche und vollkommen begrenzte Fläche der Schultafel (z. B.) gleichwol unendlich viele Punkte.

Demungeachtet muss ich jenen Übertritt*) für einen Rückschritt halten

*) Als eine Wirkung dieser Schwenkung citire ich einen Herrn Peirce zugeschriebenen passus aus der verdienstlichen Abhandlung von Miss Ladd (Frau Franklin) — vergl. Studies in logic, p. 19 —: „In any proposition of formal logic, ∞ represents what is logically possible; in a material proposition it represents what exists." Damit scheint mir doch — lucus a non lucendo — der Charakter des Symbols $\frac{1}{0}$ auf den Kopf gestellt zu werden!

und scheint mir für den *identischen* Kalkul mit Gebieten und Klassen sowol als mit Aussagen die 1 unbedingt den Vorzug vor der ∞ zu verdienen aus folgenden Gründen:

α) Während die Gleichung $a \cdot 1 = a$ für die Arithmetik eine fundamentale ist, spielt die Gleichung $a + \infty = \infty$ daselbst gar keine Rolle. Grund: die „absolute ∞" ist gar keine Zahl, sondern wird nur zeitweilig zum Zahlengebiet herangezogen um in der That den Mangel, das Nichtvorhandensein eines Zahlenwertes zu verdecken. Manche Leser dürften deshalb schon Anstoss daran genommen haben, dass ich überhaupt von „einer Unendlich" gesprochen. Die ∞ spielt in der Mathematik nur die Rolle eines *„Lückenbüssers"* (S. 240).

β) In den Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung (cf. De Morgan Boole, Peirce, Mac-Farlane, Mc Coll) entspricht die identische Eins immer dem bekannten Symbol, 1, der Gewissheit.

γ) In der Anwendung auf jede *endliche* Mannigfaltigkeit, d. i. auf eine solche, welche nur eine begrenzte Menge von Individuen, Elementen umfasst (Exempel: Feldergebiet eines Bogens karrirten Papiers) muss Denen, die sich aus dem angeführten Grunde für das Symbol ∞ entschieden haben, dieses ganz ebenso unpassend erscheinen, wie ihnen für eine unendliche Mannigfaltigkeit das Symbol 1 erschien.

δ) Zudem dürfte es sich aber auch empfehlen, das Symbol ∞ reservirt zu behalten für andere Zwecke: nämlich als *Symbol des Widerspruchs, der Unverträglichkeit.* Schon im identischen Kalkul — doch ist dies hier von geringem Belange — müsste man damit eigentlich die Ausdrücke $\frac{1}{0} = 0 - 1$ [vergl. § 23, *σ*)] darstellen. In gewissen andern Disziplinen indess, die mit dem identischen Kalkul nur verwandt sind, nicht zusammenfallen, ist es von hohem Werte, das Symbol ∞ zu dem angedeuteten Zwecke verfügbar zu haben. Speziell z. B. um die Unverträglichkeit gewisser Funktionalgleichungen, Algorithmen miteinander in Formeln zu setzen bedürfen wir dieses Zeichens, als des am angemessensten erscheinenden (vergl. Anhang 5, Beleg 7). *Im Grunde würde so der Gebrauch von ∞, statt 1, legitim eingeschränkt auf den Fall, wo die Elemente (und also auch die Gebiete) der ganzen Mannigfaltigkeit nicht alle verträglich sind miteinander.*

Dieser Fall aber ordnet sich nicht dem identischen Kalkul unter, sondern gibt mit Veranlassung zur Begründung eines neuen Kalkuls, des eigentlich „logischen" oder Kalkuls mit „Gruppen", in Bezug auf den wir sehen werden, dass er von einer gewissen Stelle an sich vom identischen abzweigt — vergl. § 12 und Anhang 4, 5 und 6.

Der Anfänger kann hier noch nicht in der Lage sein, die unter δ) rubrizirten Bemerkungen ganz zu verstehen, mithin die angeführten Gründe voll zu würdigen. Anders Derjenige, der schon das Buch durchgearbeitet haben wird. Für diesen müssen wir der Vollständigkeit wegen noch eines bemerken:

Im Aussagenkalkul werden ja auch Aussagen in Rechnung gezogen, die gemeinhin zu reden miteinander „unverträglich" sind, die *mit ihrem Sinne* einander „widersprechen". Es scheint demnach kraft des von mir unter δ) Gesagten das Verfahren des Herrn Peirce, die ganze Mannigfaltigkeit der Aussagen mit ∞ zu bezeichnen, auf den ersten Blick gerade gerechtfertigt zu sein. Und doch bestreite ich eben letzteres! Und dies mein Grund: Der Aussagenkalkul wird — wesentlich ganz in Übereinstimmung mit Peirce — von uns so angelegt werden, dass man die Aussagen (teilweise absehend von deren Sinne) jeweils in *Gebiete* umschreibt: in Gebiete von Zeitpunkten. Von einer Unverträglichkeit der letzteren miteinander (und in *diesem* Sinne also auch der zugehörigen Aussagen) kann dann so wenig die Rede sein, wie von einer Unverträglichkeit, einem „Widerspruch zwischen den Punkten einer geraden Linie".

In der That wird dieser Aussagenkalkul auch nur ein Unterfall sein des identischen Kalkuls mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit *von unter sich verträglichen* Elementen.

Ein Beispiel dagegen des „logischen" Kalkuls, der einen wesentlich andern Anblick darbieten wird, liefert erstmals der logische Kalkul mit Funktionalgleichungen, Algorithmen und Kalkuln, auf den wir in Anhang 4 und 5 eingehen.

Aus diesen Gründen sei die Beibehaltung der (Boole'schen) 1 *empfohlen und hier bethätigt.*

$23_\times$) Theorem. *Stets ist:*

$$a(a+b) = a.$$

Beweis 1. Nach I ist $a \Subset a$, zugleich nach 6_+): $a \Subset a+b$.

Aus diesen beiden Subsumtionen folgt nach Def. $(3_\times)'$:

$$a \Subset a(a+b).$$

Umgekehrt ist aber auch nach $6_\times$):

$$a(a+b) \Subset a.$$

23_+) Theorem. *Stets ist:*

$$a+ab = a.$$

Beweis 1. Nach I ist $a \Subset a$, zugleich nach $6_\times$): $ab \Subset a$, woraus nach Def. $(3_+)'$ folgt:

$$a+ab \Subset a.$$

Dazu ist nach 6_+) direkt:

$$a \Subset a+ab.$$

Hiemit ist denn nach Def. (1) die Gleichheit erwiesen.

Beweis 2. Nach 6) ist: $ab \Subset a \Subset a+b$ und die erste dieser beiden Subsumtionen lässt sich nach dem einen Teil des Th. 20) umschreiben in die Gleichung 23_+), die zweite Subsumtion, nach dem andern Teil von 20), in die Gleichung $23_\times$). –

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

nicht verliert, während doch ein Jeder des ganzen Einfalles oder Gedankens teilhaftig geworden, und auf diesem Umstand beruhen wesentlich die grossen Vorteile des sog. Gedankenaustausches (eventuell auch die Nachteile, z. B. bei Verleumdung). Wenn in einer Gesellschaft von hundert Personen Jeder auch nur *einen* klugen Gedanken hat und ihn den Andern mitteilt, so geht ein Jeder mit hundert klugen Gedanken nach Hause*)! Der Verteilungsprozess ist hierbei untrennbar verbunden mit einer Vervielfältigung, mit einem wiederholten Inexistenztreten des Verteilungsobjektes. Eine Geldsumme z. B. lässt unter die Anwesenden in dieser Weise sich leider nicht verteilen.

Die Anwendung der Formel $27_\times$) in dem ebenerwähnten Sinne heisst *Ausmultipliziren;* man sagt, dass man die Summe $b+c+\cdot\cdot$ „mit a ausmultiplizire", wenn man das Produkt $(b+c+\cdot\cdot)\,a$ in $ba+ca+\cdot\cdot$ verwandelt.

Man sagt in der Arithmetik auch, das Produkt werde „entwickelt", doch wird man auf diese Ausdrucksweise *hier* besser verzichten, weil wir dieselbe in § 19 in einem andern Sinne einzuführen haben. Der Engländer verfügt hier über das Wort *„expanded"* zum Unterschiede von „developped".

Soll $a(b+c+d\cdot\cdot)$ ausmultiplizirt werden, so *„geht man mit dem Faktor a"* in Gedanken *„in die Klammer hinein"*, und lässt ihn bei dem ersten Gliede auf welches man stösst gewissermassen hängen. Ohne aber dadurch seiner Begleitung verlustig zu gehen, wandert man mit ihm weiter, um ihn auch bei dem zweiten Gliede haften zu lassen, und so fort.

Die umgekehrte Anwendung der Formel, wobei man also eine Summe $ba+ca+da\cdot\cdot$ in das Produkt $(b+c+d\cdot\cdot)a$ zusammenzieht, heisst das „Ausscheiden des gemeinsamen Faktors" a. Rückwärts gelesen also liefert uns die Formel $27_\times$) den Satz: *Wenn die Glieder einer Summe einen „gemeinsamen"* (genauer blos: *übereinstimmenden*) *Faktor „enthalten"***), *so kann man denselben „ausscheiden", d. h. ihn neben eine Klammer setzen, in welche die Summe der andern Faktoren geschrieben wird.*

Damit dies korrekt sei, muss indess jedes Glied der gedachten Summe als ein *„binäres"*, d. i. aus nur *zwei* Faktoren bestehendes, Produkt angesehen werden, dessen einer Faktor der in allen Gliedern laut Voraussetzung übereinstimmend vorhandene oder „gemeinsame" Faktor

*) Volkstümliches Argument des unvergesslichen Dr. Faucher, auf die Anwesenden bei der Gründung eines Arbeiterbildungsvereines exemplifizirend vorgebracht.

**) Soll heissen: „als Operationsglied enthalten", keineswegs aber im Sinne einer Überordnung oder Supersumtion, statt welcher im Gegenteil bei den Gliedern gegenüber dem Faktor eine Unterordnung, Subsumtion vorläge. Für „enthalten" sage man darum unverfänglicher: „haben", *„besitzen"*.

ist. Bestand also ein Glied aus vielen Faktoren, so wird in ihm, nach Abtrennung des „gemeinsamen" erst das Produkt der übrigen Faktoren den „andern" Faktor vorstellen, von welchem in obiger Erklärung die Rede war (durchaus nicht dürfte die Summe von dessen Teilfaktoren gebildet werden).

Wie an dem Beispiel der Formel $27_\times$) zu sehen ist, können die beiden Sätze, welche eine Formel vor- und rückwärts gelesen liefert, gänzlich verschieden klingen. Dies wird sich sogar als die Regel erweisen. Gleichlauten, m. a. W. in *einen* Satz zusammenfallen, müssen die beiden nur dann, wenn die Formel symmetrisch ist, d. h. die eine Seite der Gleichung durch blosse Buchstabenvertauschung in die andere übergeführt werden kann, was dann nebenbei gesagt (durch die entgegengesetzte Vertauschung) auch immer umgekehrt der Fall sein muss. Es war dies unter den bisherigen Formeln oder Theoremen nur bei den Kommutationsgesetzen 12) der Fall.

Die Formel $27_\times$) werden wir *„das duale Gegenstück des Distributionsgesetzes"* nennen.*) Dass sie dies wirklich ist, nämlich durch blosse Vertauschung von „plus" und „mal" aus dem (eigentlichen) Distributionsgesetze hervorgeht, erkennt man deutlichst, wenn man in beiden Formeln die unterdrückten Malzeichen nebst den gesparten, mental zu ergänzen gewesenen Klammern ausdrücklich anschreibt:

$$27_\times)\quad a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)\quad\Big|\quad 27_+)\quad a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c).$$

Auch die Formel 27_+) ist von distributivem Charakter; sie zeigt, dass ein Summand, welcher zu einem Produkte tritt, sich auf die Faktoren des letzteren „verteilt". *Statt ein Symbol zu einem Produkt zu addiren, kann man es zu jedem Faktor desselben addiren und die Ergebnisse (Einzelsummen) miteinander multipliziren.* Umgekehrt: *Wenn die Faktoren eines Produktes einen übereinstimmenden Term* (Summanden) *enthalten, so lässt sich das Produkt reduziren auf diesen Term vermehrt um das Produkt der restirenden Terme* in den als nur zweigliedrige oder *„binomische"* Summen anzusehenden Faktoren.

Von diesen beiden Sätzen ist wol der letztere für die Technik des identischen Kalkuls noch von einigem Werte. Wie sich zeigen wird, lässt aber die Anwendung des Th. 27_+) sich überhaupt umgehen, und kann man schon mit dem Distributionsgesetze $27_\times$) auskommen.

In der Arithmetik gilt die Formel 27_+) *nicht;* hier stehen Multiplikation und Addition nur *in einseitig distributivem Zusammenhange:* die

*) In [2] glaubte ich, dieselbe entdeckt zu haben; jedoch war mir Herr Peirce in [1a] zuvor gekommen.

weise) — wie dies schon bei den Raisonnements des gewöhnlichen Lebens eine geringe Aufmerksamkeit lehrt.

Anstatt der beiden Subsumtionen 25_+) und 26_+) wollen wir schliesslich nur die Gleichung 27_+), die sie in sich zusammenfasst, noch für Klassen formuliren: *„Was a oder b und zugleich a oder c ist, das sind die a, nebst den b welche c sind.“*

Exempel: Die Gebildeten und die wohlhabenden Adeligen sind gerade diejenigen Personen, welche gebildet oder wohlhabend und (zugleich) gebildet oder adelig sind.

Ich muss an dieser Stelle das Verhältniss des hier Vorgetragenen zu Herrn Ch. S. Peirce's Vorarbeiten kennzeichnen.

So weit der identische Kalkul als Buchstabenrechnung bis hier überhaupt zur Darstellung gekommen ist, erscheint sein Aufbau der Hauptsache nach ganz in den §§ 4, 5, 10 und 11 enthalten. In formeller Hinsicht ist für diese Entwickelung Herrn Peirce's grundlegende Arbeit[5] im dritten Bande des American Journal of Mathematics maassgebend gewesen, und zwar nicht nur in Bezug auf den Plan im grossen und ganzen, sondern auch bezüglich fast aller einzelnen Sätze und der Mehrzahl ihrer Beweise. Die Sätze allerdings waren zum Teil schon von Boole, Jevons und Anderen gegeben.

Ein beträchtlicher Unterschied findet jedoch statt hinsichtlich der Interpretation der vorkommenden Symbole. Herr Peirce nämlich fasst die Buchstaben durchweg als Urteile auf, begründet also die Theoreme als solche des „Aussagenkalkuls“ — wogegen hier sie als solche des „Gebietekalkuls“ entwickelt wurden. Durch das letztere Verfahren erhalten sie, wie in § 32 gezeigt werden wird, eine erheblich grössere Tragweite; sie werden ganz wesentlich verallgemeinert. In formeller Hinsicht indess ist die Verschiedenheit der Interpretation bei dem von Peirce eingehaltenen Gange zufällig fast ohne jeglichen Einfluss gewesen, und lag uns oft einfach ob, die Peirce'schen Betrachtungsweisen auf die Gebiete zu übertragen.

Fussend auf die allbekannten Prinzipien I und II und die Definitionen (1), (2) und (3), von welchen die letzteren namentlich ihm eigentümlich sind, gibt Herr Peirce eine streng analytische Herleitung der verschiedenen Theoreme des Kalkuls und zwar zunächst derjenigen — sagen wir *„bejahenden Charakters“*, in welchen nämlich von Negationen nicht die Rede ist — bis exclusive des Theorems 25).

Hier angelangt hält er indess bei den Distributionsgesetzen inne und werden diese [von uns mit 27) numerirten Formeln] von ihm ([5] pag. 33) mit der Bemerkung abgefertigt, dass sie nach l. c. von ihm citirten Formeln leicht zu beweisen, der Beweis aber für die Mitteilung zu langwierig sei [They are easily proved by*) . . ., but the proof is too tedious to give].

Dies war nun ein zu berichtigender Punkt.

Von den beiden Subsumtionen 25) und 26) aus denen als einfacheren Sätzen das „volle“ Distributionsgesetz 27) sich zusammengesetzt erweist,

*) Hier Def. (3) und Th. 6).

liess die eine 25) sich in der That leicht, aber gar nicht langwierig, auf dem angedeuteten Wege beweisen. (Von den zwei in § 11 von mir gegebnen Beweisen beansprucht der erste kaum mehr als *eine* Zeile an Druckraum.)

Für den andern Teilsatz 26) aber wollte es mir zunächst durchaus nicht gelingen, den fehlenden Beweis zu erbringen. Statt dessen glückte es mir vielmehr, die Unbeweisbarkeit des Satzes — wie oben (in Verbindung mit den citirten Anhängen) auseinandergesetzt — darzuthun, und eine dieserhalb mit Herrn Peirce geführte Korrespondenz lieferte die Aufklärung, dass derselbe seines diesbezüglichen Irrtums ebenfalls schon inne geworden war — vergl. hiezu die Fussnote auf p. 190 in dessen inzwischen erfolgter Fortsetzung [8] seines citirten Aufsatzes, im siebten Bande des American Journal.

Wenn ich auch in dieser Berichtigung mit Herrn Peirce zusammentraf, so glaube ich doch darin über ihn hinauszugehen, dass ich eben die Unerreichbarkeit des zuerst von ihm erreicht Geglaubten nachweise.

Interessant wird es nunmehr sein, zu sehen, in welcher Gestalt das von Peirce errichtete wissenschaftliche Gebäude nach jener Berichtigung weiterzuführen ist.

Durch jenen Beweis der Unbeweisbarkeit der Subsumtion 26) wird es offenbar gemacht, dass statt des *einen* eigentlich *zweierlei* Kalkuln existiren, derart, dass in dem einen beide, im andern nur der eine der beiden Teile des Distributionsgesetzes unbedingt statthat. Mit dieser Erkenntniss aber drängt sich die Notwendigkeit auf, die verschiedenen Kalkuln auch verschieden zu benennen. Es erschien mir angemessen, den ersten, bisher schlechtweg so genannten „Logikkalkul“ seitdem als den *„identischen“* Kalkul zu bezeichnen im Gegensatz zu dem andern, dem Kalkul mit „Gruppen“ — vielleicht als dem eigentlich *„logischen“*, beide Kalkuln jedoch nach wie vor in das Gebiet der *„Algebra der Logik“* zu verweisen.

Bis zum Einschluss der Theoreme 25) fallen beide Kalkuln wie gesagt in *einen* zusammen, so weit decken sie sich. Erst bei den Subsumtionen 26) erfolgt die Trennung, indem auch diese und damit das volle Distributionsgesetz 27) im identischen Kalkul noch durchaus gelten werden, im logischen (dem *Kalkul mit „Gruppen“*) nicht. So weit auch findet dieser Gruppenkalkul sich in Anhang 4 und 6 entwickelt, und darüber hinaus ist eine Entwickelung ihm überhaupt noch nicht zuteil geworden, auch bleibt er wol naturgemäss zurück, da ihm so wichtige Gesetze des identischen Kalkuls abgehn. Wir beschäftigen uns hiernächst nur mit dem identischen Kalkul weiter.

Es sei nicht in Abrede gestellt die gemeinverbindliche Denknotwendigkeit dieser Überlegung, so wenig, als wie schon die Selbstverständlichkeit des durch sie (womöglich *noch*) plausibel(er) gemachten Satzes.

Allein es wird bei diesen Schlüssen von einem Grundsatze Gebrauch gemacht, der bisher weder implicite noch explicite Erwähnung fand, nämlich von diesem:

„*a ist* entweder *b* oder *c*“ heisst genau dasselbe, wie „entweder *a ist b*, oder *a ist c*“. Kürzer: *Was b oder c ist, ist entweder b, oder es ist c.*

Man sieht, wie hienach die Kopula „ist“ sich verteilt auf die beiden Glieder der Alternative, und wie umgekehrt sie von diesen beiden auch wieder abgezogen und in eine einzige Kopula zusammengezogen verschmolzen werden kann.

Von den in diesem Grundsatz für „einander äquivalent“ erklärten beiden Urteilen ist das erste ein kategorisches, also mit *einer* Kopula versehenes, mit dem Subjekte *a* und dem Prädikate „*b* oder *c*“. Das zweite Urteil aber ist gar kein kategorisches, sondern ein „disjunktives“. Es besteht aus zwei Sätzen, deren jeder für sich seine Kopula besitzt, und die mittelst der Bindewörter „entweder . .“, „oder . .“ verknüpft, in Abhängigkeit voneinander gesetzt sind.

Es gehört dieser Grundsatz als schlechthin gültige Formel ausschliesslich dem „Aussagenkalkul“ an, woselbst wir ihn noch näher studiren werden—§ 45, α_+). Im Gebietekalkul gilt er im allgemeinen *nicht*: Wenn ein Gebiet *a* im Gebiete $b + c$ enthalten ist, braucht es nicht entweder in *b* oder in *c* ganz enthalten zu sein. Daselbst gilt er — wie wir erst viel später, § 47, sehen werden — nur für die „*Individuen*“ der Klassen, die Punkte von *a*, nicht aber für die Klassen selber.

Erst wenn diese „*Argumentation auf die Individuen*“ der Klasse als ein Grundsatz, als ein „Prinzip“ ausdrücklich vorausgeschickt worden wäre, dürften wir die obige Überlegung als einen wirklichen *Beweis* hinstellen.

Dergleichen zu thun wäre wohl in der That am zweckmässigsten beim ersten Unterricht mit Schülern.

Hier dagegen wollen wir darauf ausgehen, unsre Axiome oder Prinzipien möglichst aus dem Gebiete- oder Klassenkalkul selbst zu schöpfen (von dem Aussagenkalkul, der sich in ihm mitenthalten erweist, solange es nur irgend angeht auch mit den Prinzipien I und II auszukommen suchend — die wir ja bislang schon in doppeltem Sinne zu citiren hatten). Da *verbietet es sich* denn *von selbst, von Argumentationen auf die Individuen* der Klassen *wesentlich Gebrauch zu machen*, solange das „Individuum“ noch überhaupt nicht einer wissenschaftlichen Definition im Klassenkalkul teilhaftig geworden, auf welche solche Argumentationen in strenger Beweisführung erst zu basiren wären. Um aber solche Definition und Beweisführung zu verwirklichen (vergl. § 47) werden wir längst schon des vollen Distributionsgesetzes zum Aufbau unsrer Disziplin bedurft haben und vielfach in der Lage gewesen sein, desselben nicht entraten zu können.

Aus diesen Gründen verharren wir bei dem gewählten Prinzipe $\mathrm{III}_\times$.

Unverkennbar geht die Arithmetik einen umgekehrten Weg: sie fängt bei Aufstellung ihrer Zahlbegriffe und ersten Sätze eben mit „Argumentationen auf die Individuen“ als den plausibelsten Überlegungen des Menschengeistes an. In didaktischer Hinsicht dürfte solches Verfahren auch die grössten Vorzüge besitzen, und tadeln wir sie keineswegs darob. Wir verlangen jedoch, dass entweder das Eine oder aber das Andre *konsequent* durchgeführt werde! *Hier* nun haben wir nicht den Begriff des Individuums sondern den der Einordnung zwischen Gebieten, Subsumtion, an die Spitze gestellt; wir haben bereits den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und müssen ihn nun auch zu Ende gehen; wir dürfen darum jenen Begriff auch noch nicht voraussetzen (es sei denn ganz nebenher bei den Illustrationen durch Beispiele oder den Nutzanwendungen des Kalkuls), sondern werden erst verhältnissmässig spät im stande sein, eine Definition des Individuums, Punktes aufzustellen.

Wir begnügen uns, einstweilen mit Peirce zu sagen, der obige „Beweis“ sei nicht syllogistisch, sondern „*dilemmatisch*“ und verweisen in Bezug auf die als ein „Dilemma“ hinzustellende Art des Schliessens auf § 45 des mehrerwähnten Aussagenkalkuls, sowie schon auf das Schema der Aufgabe ι_1) des § 18. [Der vorgerücktere Leser wird leicht diese Schlussform als eine verbal hier wirklich mit zur Anwendung gekommene erkennen, indem er sich das *s* des Schema's als $a(b + c)$, das *p* desselben als $ab + ac$ deutet — ohne dass wir nötig hätten, hierauf nochmals zurückzukommen.] Den *vor*greifenden Charakter des „Beweises“, zufolge dessen er hier noch nicht am Platze, noch deplacirt erscheint, erblicke ich aber wesentlich nicht darin, dass diese Schlussform in ihm zur Anwendung kommt, sondern vielmehr in dem erwähnten „Argumentiren auf Individuen“.

Dual entsprechend könnte der andre Satz:

26_ι) $$(a + b)\,(a + c) \mathrel{=\!\!\!\in} a + bc\,,$$

— in Worten: „Was *a* oder *b* und zugleich *a* oder *c* ist, ist entweder *a* oder *b* und *c*“ auch dilemmatisch so „bewiesen“ werden: Dasselbe ist entweder *a* oder nicht. Ist es nicht *a*, so muss es nach dem ersten Teil der Voraussetzung *b* und nach dem zweiten *c* sein; also ist es entweder *a* oder „*b* und *c*“.

Multiplizirt man die *letztere* Gleichung beiderseits mit b, so entsteht nach Prinzip $\mathrm{III}_\times$ [sogar schon nach $\mathrm{III}_\times{}^0$] und Th. $14_\times$):

$$ab + b = ab + bc.$$

Ebenso entsteht aus ihr durch beiderseitige Multiplikation mit c:

$$ac + bc = ac + c.$$

Wegen der *erstern* Gleichung ist aber gemäss 16_+):

$$ab + bc = ac + bc$$

und folglich nach Th. 4) auch

$$ab + b = ac + c;$$

d. h. nach 23_+), indem die ersten Terme absorbirt werden haben wir:

$$b = c,$$

q. e. d. Einfacher hätte man auch, mit Rücksicht auf die Voraussetzung $ab = 0$, nach 21_+) und 23_+) das eine Multiplikationsergebniss in $b = bc$, das andre, wegen $ac = 0$, in $bc = c$ zusammenziehen können. Indessen hat der erstere Beweis den Vorzug, sich auf eine spätere Erweiterung des Satzes, zu Th. 40) und Zusätze, ohne weiteres übertragen zu lassen.

Bezeichnen werden wir die Negation eines Gebietes a, indem wir diesem den „*Negationsstrich*" $_1$ als Suffixum anhängen, sonach mit a_1 (gelesen: „*a-nicht*").

Sollte ein zu negirendes Gebiet einen zusammengesetzten Ausdruck haben, so wird es überdies dabei einzuklammern sein gemäss der allgemein bezüglich Gebrauchs der Klammern geltenden Maxime (vergl. Anhang 2). So wird z. B. $(ab)_1$, $(a+b)_1$, $(a_1)_1$ die Negation von ab resp. $a+b$ und a_1 vorstellen.

Bei der Wahl obiger Bezeichnung kommt folgendes in Betracht.

Das Suffixum $_1$ soll einen *Vertikalstrich* vorstellen. Mittelst eines solchen werden wir auch anderweitig — namentlich für Beziehungen — die Negation andeuten. So wird uns z. B. das vertikal durchgestrichene Gleichheitszeichen: $\neq$, gelesen „ungleich", die Verneinung der Gleichheit auszudrücken haben. Nach diesem Prinzip wird es nämlich leicht, zu jedem Beziehungszeichen sofort dessen Verneinung zu bilden. Indem man einfach dasselbe vertikal *durchstreicht* gewinnt man ein hübsches und durch sich selbst verständliches, mnemonisches, obendrein auch noch nicht anderweitig vergebenes Zeichen zur Darstellung eben der Beziehung, welche die Negation von jener zu nennen.

Aus $>$, z. B. wäre hienach auch das regelrechte Zeichen für „nicht grösser", welches für's reelle Zahlengebiet als $\leqq$ („kleiner oder gleich") in der Mathematik sehr viel gebraucht wird, unschwer abzuleiten.

Da es nun nicht angängig ist, Buchstaben oder gar zusammengesetzte Ausdrücke jeweils in Druck und Schrift wirklich durchzustreichen, so muss eben der Vertikalstrich *neben* jenen angemerkt werden (im letztern Falle,

wie betont, unter Einklammerung der Ausdrücke). Da ferner eine Negation (die Operation des Negirens) nicht vollzogen werden kann, es sei denn an einem bestimmten Objekte, so ist es wiederum naturgemäss, das Objekt, welches man behuf Negirens schon haben muss, dem Negationsstrich dabei voranzuschicken, letztern also dahinter zu stellen, sei es auf gleicher Höhe, sei es darüber (als Accent) oder darunter (als Suffixum). Ich entschied mich für das Suffixum als das in Druck und Schrift die grösste Deutlichkeit gewährende Zeichen von immerhin minimalen Raumansprüchen.

[In meiner früheren Schrift[2] verwendete ich zur Bezeichnung der Negation noch das Suffixum 1, schrieb also für unser non-a stets a_1 (gelesen: „*a unten* 1", kürzer „*a-eins*"). Es sollte dies daran erinnern, dass, wie in § 23 gezeigt wird, die Negation von a auch durch $1 - a$ darstellbar ist. Jedoch erscheint es angezeigt, des Dualismus halber, der alsdann reiner zum Ausdruck kommen wird, ein von den Symbolen 0 und 1 unabhängiges Zeichen zur Darstellung der Negation zu verwenden.]

Von Andern (namentlich Boole, R. Grassmann und Ch. S. Peirce) ist vorgezogen worden, das zu negirende Objekt mittelst *Horizontalstrich* zu *über*streichen, für unser a_1 also zu schreiben $\bar{a}$ (gelesen *a strich*).

Ernstliche Einwände lassen auch gegen diese Gepflogenheit sich nicht erheben. Die Entscheidung für diese oder jene ist gewissermassen Geschmacksache. Eine jede von ihnen hat gewisse Vorteile und Nachteile.

Will man mit dem Horizontalstrich *konsequent* sein, so müsste man nun mit $\equiv$ (statt $\neq$) die Ungleichheit darstellen. Dies sieht nun erstlich aus, wie ein doppelt negirtes Minuszeichen. Sodann ist das Zeichen auch schon anderweitig in Beschlag genommen: in der Zahlentheorie zur Darstellung von „gleichrestig" oder „*kongruent*" — in andern Disziplinen auch wol für „identisch gleich" im Sinne von „allgemein gleich", d. i. gleich für *alle* Wertsysteme gewisser Buchstabengruppen. Das Zeichen $\equiv$ würde also hier seine dritte, mit den bisherigen disparate, Bedeutung beigelegt erhalten, wogegen $\neq$ für „nicht gleich" schon vielfach üblich ist (vergl. z. B. Aufsätze von *Netto* und Andern im Journal für die reine und angewandte Mathematik). — Weiter würden wir für die Verneinung noch andrer Beziehungen, wie z. B. für „nicht untergeordnet" mit dem Horizontalstrich viel weniger hübsche Zeichen bekommen: $\overline{\subset}$ statt $\not\subset$, etc. — Zeichen, die aus getrennten Teilen bestehen, weniger symmetrisch sind und wol auch mehr Raum einnehmen, als mit dem Vertikalstriche.

Endlich, schon bei Buchstaben, gefällt mir nicht, dass die Höhenlage des Horizontalstrichs von der Höhe des Buchstabens abhängig wird, z. B. $\bar{a}\bar{b}$ für unser $a_1 b_1$. Sind aber die Buchstaben von gleicher Höhe, wie a und c, so erscheint es allzu nahe gelegt, solche, wie wir sehen werden, grundverschiedene Ausdrücke wie $\bar{a}\bar{c} = a_1 c_1$ und $\overline{ac} = (ac)_1$ miteinander zu verwechseln, indem ihre Unterscheidung davon abhinge, ob an einer Stelle von höchst geringer Ausdehnung die Druckerschwärze, Tinte, nicht angegangen oder übergeflossen ist.

Bei zusammengesetzten Ausdrücken indess hat der Horizontalstrich den Vorteil, zugleich als Vinculum zu dienen und die Klammer zu ersetzen, wie in $\overline{ab}$, $\overline{a+b}$ und $\bar{\bar{a}}$ für die oben angeführten drei Beispiele. Auch

lässt *unsre* Schreibweise wegen der Ähnlichkeit des Negationsstrichs mit dem Suffixum 1 es fortan weniger ratsam erscheinen, ein erstes, zweites, drittes etc. (in einer Untersuchung auftretendes) a etwa mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hier zu benennen. Hiefür kann man jedoch, da Potenzen ohnehin ausgeschlossen sind (Th. 14), nun mit $a^1, a^2, a^3, \ldots$ sich sehr gut behelfen.

In Bezug auf die Streitfrage zwischen Horizontal- und Vertikalstrich bei zu verneinenden Beziehungszeichen könnte übrigens Herrn Charles S. Peirce die Autorität seines Vaters Benjamin Peirce[1] gegenübergestellt werden, mit dessen Bezeichnungsvorschlägen in seiner „Linear associative Algebra" wir teilweise zusammentreffen.

De Morgan, Jevons und Andere nehmen für Begriffe resp. Klassen und deren Negation die korrespondirenden Buchstaben aus dem grossen und kleinen Alphabete, bezeichnen die Negation von A mit a, sowie umgekehrt — was nach Th. 31) zulässig. Dies ist nur durchführbar, insoweit blos „einfache" Symbole in Betracht kommen (vergl. Anhang 2), verbietet sich indess, wenn das Negiren auch für zusammengesetzte Ausdrücke soll angedeutet werden können. Denn die Negation von $A + B$ würde durchaus nicht etwa $a + b$ sein, u. s. w. — vergl. die Theoreme 36). Der Vorschlag erscheint uns *hier* als gänzlich unannehmbar.

Mit Worten nennen wir die Negation von a auch „*Nicht-a*" oder „*Non-a*".

Indessen „non-a", „non $(a+b)$" etc. für unser a_1, $(a+b)_1$ in Formeln anzusetzen würde schwülstig („cumbrous") werden.

Definition (6), der Negation †.

„Negation" eines Gebietes a nennen wir ein solches Gebiet a_1, welches zu ihm in der Beziehung steht, dass zugleich:

$$a a_1 \not\equiv 0 \quad \textit{und} \quad 1 \not\equiv a + a_1$$

ist.

Da nach Th. 5) ohnehin $0 \not\equiv a a_1$ und $a + a_1 \not\equiv 1$ sein wird, so gelten dann kraft Def. (1) auch die beiden Sätze:

30) Theoreme. *Allgemein ist:*

$30_\times)$ $\quad a a_1 = 0.$ $\qquad | \; 30_+)$ $\quad a + a_1 = 1.$

Diese Gleichungen hätten ebensogut zur Definition der Negation a_1 von a verwendet werden können, muten jedoch dieser Negation scheinbar etwas mehr zu, als nur die obigen in ihnen mitenthaltenen beiden Subsumtionen zu erfüllen.

Nach § 7, S. 214, können wir nun auch sagen: *Negation eines Gebietes nennen wir ein solches Gebiet, welches zu demselben zugleich disjunkt und supplementär ist.*

Zusatz 1 zu Def. (6). Zu einem Gebiete a kann es *nicht mehr als eine* Negation geben.

† Sehe S. 720.

Denn wäre a_1' eine zweite, so würden neben den beiden Gleichungen 30), und mit demselben Rechte, auch diese beiden bestehen:

$$a a_1' = 0 \quad \text{und} \quad a + a_1' = 1$$

und würde aus allen vier Gleichungen nach Hülfstheorem 29) [wo b dem a_1 und c dem a_1' entspricht] folgen:

$$a_1' = a_1,$$

d. h. die beiden Negationen wären identisch, einerlei, wären in der That nur *eine*.

Die Operation des Negirens, d. i. die Herstellung der Negation zu einem gegebenen Gebiete, wird darnach jedenfalls keine „mehrdeutige" sein, die Negation a_1 von a ist ein *höchstens eindeutiges* Gebietsymbol. Dagegen könnte noch dieses Symbol als ein „undeutiges", die Operation des Negirens als „unausführbar" erscheinen. Bislang ist noch die Möglichkeit zugelassen, dass — vielleicht je nach dem „Werte" von a — das Zeichen a_1 ein sinnloses, einer Deutung als eigentliches Gebiet eventuell ganz unfähiges ist, welches dann als ein „uneigentliches" Gebiet der Mannigfaltigkeit zu adjungiren die Def. (6) uns zumutet.

Diese Möglichkeit schliesst aus das folgende Postulat mit dem zugehörigen die Interpretation liefernden Nachweise.

Postulat ((3)). *Zu jedem Gebiete a gibt es* (mindestens) *eine Negation a_1* (und dann wie schon gezeigt auch nur diese).

Dieselbe wird als Rückstand erhalten, wenn man das Gebiet a aus der ganzen Mannigfaltigkeit 1 *fortlässt.*

Dieses Restgebiet hat nämlich in der That die Eigenschaft, erstens: mit dem Gebiete a keinen Punkt gemeinsam zu haben, d. i. die Gleichung $30_\times)$ zu erfüllen; hätte es einen Punkt mit a gemein, so wäre ja dieser Punkt von a nicht pflichtschuldigst fortgelassen — und zweitens: das Gebiet a auch zur ganzen Mannigfaltigkeit 1 zu ergänzen, d. i. die Gleichung $30_+)$ zu erfüllen. Fehlte auch nur ein Punkt an dieser Mannigfaltigkeit, so wäre ja nicht der volle Rückstand genommen. Dasselbe ist sonach eine richtige Negation zu a, und weil es nur *eine* gibt, haben wir hier den bestimmten Artikel anzuwenden und zu sagen: *die* Negation von a.

Die Ausführungen des vorstehenden Absatzes sind nicht etwa als ein „Beweis" des vorhergehenden Postulates anzusehen, dessen Anerkennung vielmehr wir schlechthin fordern. Sie sollen nur beitragen, den Sinn desselben voll zum Bewusstsein zu bringen, und der Anschauung resp. Intuition behülflich sein, dasselbe zu verifiziren.

Die Negation a_1 eines Gebietes a ist — in unserm bevorzugten

$$x = abc + abd + acd + \\ + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)(a + bcd).$$

Multiplizirt man hier vollends aus, so gehen auch noch die ersten drei Terme von x in dem Ergebnisse ein, und entsteht:

$$x = ab + ac + ad + bcd$$

als das gesuchte Ergebniss.

Ganz genau *dual entsprechend* kann man auch jeden Ausdruck der gedachten Art (der mithin Ergebniss der Verknüpfung von lauter einfachen Symbolen mittelst identischer Multiplikationen und Additionen ist) *„zerfällen in seine letzten Faktoren"*, („ultimate factors" — von Peirce auch geradezu als *Primfaktoren* bezeichnet), d. h. in solche Faktoren, welche nur Summen aus irgendwelchen von den gegebenen einfachen Symbolen sind, mithin kein Produkt mehr zum Summanden enthalten.

Man scheide hier gemeinsame Faktoren, soweit solche ersichtlich sind, jeweils aus, und vereinige die dann noch übrig bleibenden Glieder successive nach dem dualen Gegenstück der Multiplikationsregel für Polynome, d. h. gemäss dem Th. 28_+), indem man jeweils jeden Faktor des einen Gliedes um jeden Faktor des andern vermehrt und die sich ergebenden Einzelsummen schliesslich miteinander multiplizirt (ohne Ausmultipliziren sie zu einem Produkte vereinigt, ihre Multiplikation „blos andeutend").

Auf diese Weise umgeformt wird z. B., wie leicht zu sehen, unser letzter Ausdruck:

$$x = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c + d).$$

Ebenso würde ein Ausdruck $y = x + e$ sich nun darstellen als:

$$y = (a + b + e)(a + c + e)(a + d + e)(b + c + d + e).$$

Da jedoch die Anwendung des dualen Gegenstücks 28_+) der Multiplikationsregel für Polynome dem Mathematiker nicht geläufig ist, so werden wir später [unter Th. 36), Zusatz 3] ein anderes Mittel angeben, um ohne jenes denselben Zweck zu erreichen — ein Zweck übrigens, dessen Verwirklichung ohnehin nur selten als vorteilhaft oder wünschenswert erscheinen möchte. —

Zusatz 2 zu Th. 28) [und 30)].

Ist eine „reduzirte" Summe gleich 1, d. h. eine Summe, deren Glieder unter sich disjunkt sind, *so ist die Negation irgend eines Gliedes dieser Summe allemal die Summe ihrer übrigen Glieder* (ohne das genannte); *ebenso* ist — noch allgemeiner — *die Negation irgend eines Aggregates von Gliedern, hervorgehoben aus dieser Summe, leicht angebbar in Gestalt des Aggregates ihrer übrig bleibenden Glieder.*

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

zu bringen, welche von den bereits aufgezählten übrig gelassen wird, und mit Sorgfalt zu erwägen, ob sie wirklich eine leere.

Unterbleibt dies, während sie doch mitangeführt wurde, so macht der Klassifizirende den Eindruck nur Selbstverständliches zu sagen. Hierauf beruht z. B. der Humor der folgenden in Studentenkreisen beliebten Hexameter von unbekanntem Autor:

Si bene rem memini sunt causae quinque bibendi:
Hospitis adventus, praesens sitis atque futura,
Vinum, festa dies et quaelibet alia causa.

— Weiss ich die Sache noch recht, so gibt's fünf Gründe des Trinkens: Erstlich die Ankunft des Gast's, dann Durst nebst künftigem Dürsten, Wein auch, und festlicher Tag, *und jegliche andere Ursach.* —

Die Gleichung 31) $(a_1)_1 = a$ stellt das „Prinzip der *doppelten Verneinung*", das „*dupplex negatio affirmat*" vor. Sie zerfällt nach Def. (1) in die beiden Subsumtionen:

$$a \in (a_1)_1, \text{ d. h. } a \textit{ ist nicht nicht-}a,$$

und

$$(a_1)_1 \in a, \textit{ was nicht nicht-}a \textit{ ist, muss } a \textit{ sein.}$$

So unbestimmt sind ihrem Sinne nach die in Worten ausgedrückten Sätze, sogar Grundsätze, der herkömmlichen Logik, dass man darüber verschiedener Meinung sein kann, welchen derselben eigentlich unsre Formeln jeweils darstellen! Es stellt z. B. Boole, dem wir uns angeschlossen, [4] pag. 49 die Gleichung 30_x) als den Ausdruck des principium contradictionis hin, wogegen Peirce[5] pag. 28 im Anschluss an Leibniz und Kant, die Subsumtion $a \in (a_1)_1$ als solchen ansieht — die umgekehrte als das principium exclusi medii hinstellend.

Man vergleiche über diese Streitfrage die gründliche Auseinandersetzung von Sigwart[1] § 23, welcher auf Aristoteles zurückgehend darthut, dass unsre obige Auffassung die berechtigte.

Übrigens hängen die drei Sätze in der That auf das innigste zusammen. Alle drei gelten sie indess nur für eine „gewöhnliche" Mannigfaltigkeit, weil nur für eine solche der Begriff Nicht-a aufgestellt werden konnte, und konstatiren sie, indem sie als schlechtweg gültige hingestellt zu werden pflegen, gewissermassen gleichmässig, dass wir uns mit unserm Denken immer nur in einer solchen bewegen.

Wer mit Sigwart die Verneinungspartikel auf die Kopula bezieht, kann die Sätze 31) auch wieder nur für Individuen von a gelten lassen, aber nicht für Klassen a. Eine Schafrasse z. B. von der es falsch ist, zu behaupten, sie sei nicht-weiss, indem sie neben schwarzen auch weisse Schafe enthält, darf darum doch nicht weiss genannt werden, weil dieses Prädikat damit auch ihren schwarzen Schafen zugesprochen würde.

Dass nun die an unsre Mannigfaltigkeit zu stellenden beiden Anforderungen „konsistent" und „rein" zu sein, nicht nur, wie erkannt, *hinreichend*, sondern auch *notwendig* (unerlässlich) sind, damit die

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

nach früherem für 0 sich $\bar{1}$, oder aber für 1 sich $\bar{0}$ durchweg schreiben, d. h. man könnte auch noch des einen der beiden Symbole 0 und 1 entraten.]

Analog lässt sich mittelst der Partikel „nicht" von den beiden Konjunktionen „und" und „oder" irgend eine logisch durch die andere darstellen:

Für „*a oder b*" könnte gesagt werden: „was nicht »Nicht-*a und* Nicht-*b*« ist".	Für „was *a und b* ist" liesse sich sagen: „was nicht »Nicht-*a oder* Nicht-*b*« ist".

Dass es aber *unzweckmässig* wäre, solches durchzuführen, sei es im Kalkul, sei's in der Wortsprache, bedarf kaum einer nähern Darlegung.

Es liegt die Möglichkeit vor, dass sich die Sätze 36) vielleicht in der Gestalt:

Was nicht *a und b* ist, muss nicht *a* oder nicht *b* sein,	Was nicht *a oder b* ist, muss zugleich nicht *a* und nicht *b* sein,

in Worte gefasst schon irgendwo in ältern Logikbüchern vorfinden.

Wo nicht, so müssen sie De Morgan zugeschrieben werden, welcher [wie Herr Venn[1] p. 389, Fussnote ausfindig gemacht hat] in [6] p. 208, indessen ohne Beweis, bemerkt, es hätten $a+b$ und ab bezüglich $a_1 b_1$ und $a_1 + b_1$ zum Gegenteile. Selbständig ist auf diese beiden hübschen Sätze unter Andern auch Herr Robert Grassmann[2] gekommen, und dürfte dieser sie zum ersten mal (und zwar auf die vorgetragene Weise) *bewiesen* haben.

Die in seiner Fussnote zu [5] p. 32 von Herrn Peirce — jedenfalls im guten Glauben — ausgesprochene, Herrn R. Grassmann eigentlich verdächtigende Vermutung (auf Grund unsicherer Reminiscenzen von Jevons' Schrift[1]) kann ich (nachdem es mir unlängst endlich gelungen ist, dieses Buch durch antiquarischen Erwerb desselben zu Gesicht zu bekommen) durchaus nicht begründet finden.

Die Anwendung der Theoreme 36) im Sinne von links nach rechts, also die Verwandlung eines Ausdruckes $(ab)_1$ resp. $(a+b)_1$ in den ihm gleichwertigen $a_1 + b_1$ resp. $a_1 b_1$ nennt man das *„Ausführen"* (Entwickeln*)) *der Negation*, welche im Gegensatz hiezu bei den ursprünglichen Ausdrücken $(ab)_1$ und $(a+b)_1$ *„nur angedeutet"* erscheint. Eine, wie hier mit Negationsstrich versehene Klammer $(\ )_1$ mag eine *„Negationsklammer"* genannt werden. Das Ausführen der Negation läuft auf das „Auflösen" dieser Klammer hinaus.

Zusatz 2 zu Th. 36).

Durch kombinirte Anwendung der beiden Theoreme 36) und des Th. 31) kann man nunmehr von jedem nur durch Multiplikation und

*) Aus einem in § 19 ersichtlichen Grunde wird dieser letztere Ausdruck indess besser vermieden.

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Ähnlich für $b = ac_1 + u$ ist $a + c \mathrel{\underline{\in}} b + c$ nämlich $a + c + u$, und wieder

$$ab_1 = a \cdot (a_1 + c)u_1 = acu_1$$

nicht notwendig 0, wie es nach Th. $38_\times$) sein müsste, falls $a \mathrel{\underline{\in}} b$ folgte.

Desgleichen, was den Zusatz betrifft, ist $ac = (a + uc_1)c$ ohne dass $a = a + uc_1$ sein müsste, endlich ist $a + c = (a + uc) + c$, ohne dass doch im Allgemeinen, und für jedes beliebige Gebiet u sein müsste $a = a + uc$.

Das Theorem sowol als sein Zusatz gilt auch umgekehrt, und zwar für jedes beliebige Gebiet c. Nämlich wenn z. B. $a \mathrel{\underline{\in}} b$ ist, so muss nach Th. 15) auch $ac \mathrel{\underline{\in}} bc$ sowie $a + c \mathrel{\underline{\in}} b + c$ für jedes c sein.

Exempel zu dem Satze. Sind die Mongolen und die Russen stets Russen oder Asiaten, zugleich alle mongolischen Russen auch asiatische Russen, so müssen die Mongolen sämtlich Asiaten sein. [Seit der chinesischen Einwanderung in fremde Weltteile sind freilich die Prämissen nicht mehr ganz zutreffend, sie waren es jedoch zeitweise.]

Zusatz 2 zu Th. 40) Theorem von Peirce.

Wenn für irgend ein c zugleich

$$ac \mathrel{\underline{\in}} b \quad \textit{und} \quad a \mathrel{\underline{\in}} b + c$$

ist, so folgt:

$$a \mathrel{\underline{\in}} b,$$

desgleichen umgekehrt, für jedes c.

Beweis 1, nach Th. 40), weil unter den Voraussetzungen des Satzes nach Th. 15) auch $acc \mathrel{\underline{\in}} bc$ und $a + c \mathrel{\underline{\in}} b + c + c$, also $ac \mathrel{\underline{\in}} bc$ und $a + c \mathrel{\underline{\in}} b + c$ folgt.

Beweis $2_\times$. Aus der zweiten Prämisse folgt durch beiderseitiges Multipliziren mit a gemäss $15_\times$):

$$aa \mathrel{\underline{\in}} a(b + c) \quad \text{also nach } 14_\times) \text{ und } 27_\times): \quad a \mathrel{\underline{\in}} ab + ac.$$

Aber es ist $ab + ac \mathrel{\underline{\in}} ab + b$, wie sich durch beiderseitiges Addiren von ab zur ersten Prämisse gemäss 15_+) ergibt. Hienach folgt a fortiori: $a \mathrel{\underline{\in}} ab + b$ oder wegen des Absorptionsgesetzes 23_+): $a \mathrel{\underline{\in}} b$, wie zu zeigen war.

Hiezu genau dual entsprechend lässt sich noch ein dritter „Beweis 2_+" führen, was dem Leser zur Übung empfohlen sei.

Die Umkehrung versteht sich nach Th. 6) und II von selbst: Ist $a \mathrel{\underline{\in}} b$, so wegen $ac \mathrel{\underline{\in}} a$ auch $ac \mathrel{\underline{\in}} b$ für jedes c. Etc.

Der Satz wäre eigentlich als ein selbständiges Theorem aufzuführen gewesen; er sieht noch einfacher aus als das Th. 40) demzuliebe wir ihn behufs Vergleichung hier eingereiht haben. Sonderliche Wichtigkeit für die Theorie möchte er gleichwol nicht besitzen und betrachte ich ihn mehr nur als Kuriosum. Die Exempel zu demselben klingen alle recht sonderbar. Z. B. Da Gold, welches käuflich, Metall ist, und alles Gold käuflich oder Metall sein wird, so muss Gold Metall sein. Umgekehrt folgt aus

letzterm einerseits, dass auch geschmiedetes Gold Metall ist, und Gold sein wird Metall oder auch geschmiedet.

Von fundamentaler Wichtigkeit sind dagegen folgende Sätze:

$41_\times$) Theorem (Peirce[5] p. 39)	41_+) Theorem. (Peirce)
Wenn $ab \mathrel{=\!\!\!\in} c$	*Wenn* $a \mathrel{=\!\!\!\in} b + c$
ist, so ist $a \mathrel{=\!\!\!\in} b_1 + c$.	*ist, so ist* $ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} c$.

D. h. *Es darf*

ein Faktor des Subjekts | *ein Summand des Prädikats*

jeweils von diesem abgelöst und mit Negationsstrich versehen (in seine Negation verwandelt, negirt) *als*

Summand zum Prädikat | *Faktor zum Subjekt*

geschlagen werden — wonach denn aus der zweiten Subsumtion mit Rücksicht auf Th. 31) auch wieder die erste folgt. Der eine Satz nämlich kann, indem man b mit b_1 vertauscht, auch als die *Umkehrung* des andern dargestellt werden, ermächtigt zum Rückschlusse von dessen Behauptung auf seine Voraussetzung.

Behufs Beweises schliesse man aus der Voraussetzung durch beiderseitiges

Addiren von b_1:	Multipliziren mit b_1:
$ab + b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b_1 + c$.	$ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b_1(b + c)$,
Nach Theorem 33_+) Zusatz gibt dies:	oder, wenn rechts ausmultiplizirt wird mit Rücksicht auf $30_\times$):
$a + b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b_1 + c$	$ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b_1 c$.
und da nach Th. 6_+) auch	Da aber nach Th. $6_\times$)
$a \mathrel{=\!\!\!\in} a + b_1$	$b_1 c \mathrel{=\!\!\!\in} c$

ist, so folgt die Behauptung nach Prinzip II.

Vergleiche hiezu das Theorem *v*) von Peirce im nächsten Paragraphen. Noch einfacher kann man sich gemäss Th. $38_\times$) und ev. 36) überzeugen, dass sowohl die behauptete als die vorausgesetzte Subsumtion hinausläuft auf die Gleichung:

$$abc_1 = 0. \qquad | \qquad ab_1c_1 = 0.$$

Exempel:

Die Säugetiere welche Flossen haben, sind Wale; ergo: die Säugetiere sind Wale oder haben keine Flossen.	Mohammedaner sind Schiiten oder Sunniten; ergo: Mohammedaner, welche nicht Schiiten sind, müssen Sunniten sein.

Neunte Vorlesung.

§ 18. Verschiedenartige Anwendungen: Rechtfertigungen, Studien und Übungsaufgaben.

α) Auf Grund der Theoreme 33_+) und Zusatz sind wir nun in der Lage, die zuerst von Jevons (dann unabhängig auch von Peirce, R. Grassmann und mir, Mc Coll und ev. noch Anderen) erfasste und in diesem Buche zu Grunde gelegte *identische Addition* vollends zu *rechtfertigen* gegenüber den von sehr beachtenswerter Seite gegen sie erhobenen Einwänden. Die Betrachtungen dürften auch an sich instruktiv sein, dazu als eine gute Übung erscheinen.

Es wurde bereits erwähnt, dass Boole[4] in, ihm unbewusst, zu engem Anschluss an das Vorbild der arithmetischen Addition die gleichnamige Operation in der Logik nur verwendet wissen will um Klassen zu verknüpfen, die keine Individuen gemein haben — und dass, nach der inzwischen vollzogenen Läuterung der Disziplin von arithmetischen Beimengungen, von neueren Autoren ihm hierin nur Herr Venn noch beipflichtet, indem er [1] pag. 381 .. 389 die Forderung verficht, die Addition auf gebietfremde Summanden, individuenfremde oder disjunkte Klassen zu beschränken.

Herr Venn verwirft es, die Summe $a + b$ für den Fall wo ab nicht $= 0$ ist, überhaupt zu erklären, da es ihm hier anstössig erscheint, dass der den beiden Gliedern gemeinsame Teil ab, welcher in die Summe $a + b$ doch nur *ein* mal eingehen soll, daselbst doch *zwei* mal (als Teil von a sowol, wie als Teil von b) implicite erwähnt wird.

Es ist unbestreitbar, dass man diesen Standpunkt einnehmen *kann*, denn auf Grund der oben citirten Sätze ist man berechtigt, und hindert in der That nichts, überall da, wo eine unsrer im Jevons'schen Sinne auftretenden Summen $a + b$ auftritt, dafür *unsymmetrisch und etwas umständlicher* sei es $a + a_1b$, sei es $ab_1 + b$ zu schreiben, oder endlich auch *symmetrisch aber noch umständlicher:* $ab + ab_1 + a_1b$.

Wer dieses vorzieht, wird also in der That es durchführbar finden, ausschliesslich mit „reduzirten" Summen zu operiren und bei Herrn

In Worten kann man überlegen: Die reichen Adeligen sind entweder gebildet oder ungebildet. Im erstern Falle sind sie unter den gebildeten Reichen, im letztern unter den adeligen Ungebildeten ohnehin erwähnt, und folglich ist es durchaus überflüssig, sie noch besonders zu erwähnen.

Man sieht, wie hier die Rechnung zwar für den in ihr noch Ungeübten vielleicht nicht bequemer ist, als die Überlegung in Worten, wie sie aber die Operationen dieses verbalen oder mentalen Räsonnements Schritt für Schritt wiederspiegelt und dieselben in knappster Form zum Ausdruck und Bewusstsein bringt.

Beiläufig haben wir vorstehend einen Satz gewonnen. Denselben spricht die Formel aus:

Theorem ι) $\qquad ab + bc + ca_1 = ab + ca_1,$

welche leicht zu merken und in der Technik des Kalkuls von ziemlicher Anwendbarkeit ist.

$\varkappa$) Der Satz ist übrigens nahe verwandt, wenn man will nur eine kleine Umformung, eines schon von Herrn Peirce aufgestellten Theorems, nämlich des folgenden: *Es gilt stets:*

Theorem $\varkappa$) $\qquad (a+x)(b+x_1) = ax_1 + bx.$

Durch Ausmultipliziren der linken Seite lässt sich nämlich erhalten:

$$xb + ba + ax_1,$$

wonach der Satz ersichtlich auf den ι) zurückkommt. In der ihr von Peirce gegebenen Form ist die Gleichung dadurch bemerkenswert, dass die eine Seite derselben als das duale Gegenstück der andern (und umgekehrt) erscheinen *würde*, wenn nicht das Symbol x zugleich mit seiner Negation x_1 tauschte. Es wäre darnach nicht korrekt, die Formel $\varkappa$) selber eine „zu sich selbst duale" zu nennen, wohl aber darf man von dem durch sie ausgedrückten allgemeinen Satze sagen, dass er sich selbst dual entspreche. Denn das duale Gegenstück von $\varkappa$), welches lautet: $\qquad ax + bx_1 = (a+x_1)(b+x),$

wird den nämlichen Satz ausdrücken, da man in letzterer Gleichung unter x auch dasjenige Gebiet verstehen kann, welches in $\varkappa$) mit x_1 bezeichnet wurde.

λ) Aufgabe. Auf einer strategischen Bahnlinie findet sich für eine gewisse Zeit der Transport verboten von allen Gütern ausser solchen, welche Kriegszwecken dienen können, wenn sie explosiv oder

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

geschickt und ungeschickt Gebrauch gemacht werden. Unzweckmässig wäre es, hier erst die beiden Binome auszumultipliziren, wobei von den vier zu bildenden Produkten blos eines, bb_1 fortfiele. Besser gehe man mit dem Faktor a in die erste Klammer und mit dem c_1 in die letzte Klammer hinein, wo dann nur je ein Glied stehen bleiben und sogleich $ab \cdot b_1c_1$ entstehen wird.

Man kann auch nach Th. 38_+) die Subsumtion umschreiben in die Gleichung:

$$(ac_1)_1 + ab_1 + bc_1 = 1 \quad \text{oder} \quad a_1 + c + ab_1 + bc_1 = 1,$$

welche sich ebenfalls bewahrheitet, indem nach Th. 33_+) Zusatz: $a_1 + ab_1 = a_1 + b_1$, desgleichen $c + bc_1 = c + b$, hernach aber $b_1 + b = 1$ und die ganze Summe: $1 + a_1 + c = 1$ nach Th. 22_+) sein wird.

Endlich könnte man die rechte Seite der fraglichen Subsumtion umformen in:

$$ab_1(c + c_1) + (a + a_1)bc_1 = ab_1c + ac_1(b_1 + b) + a_1bc_1 = ac_1 + (ab_1c + a_1bc_1).$$

Nach Th. 6_+) ist nun ein Summand — hier ac_1 — jederzeit in der Summe enthalten. —

ν) So unvollständig unser bis jetzt gesichertes wissenschaftliches Kapital noch ist (wie aus der Fortsetzung der Theorie erhellen wird), so vermag man doch mit demselben schon unbeschränkt neue Sätze aufzustellen, deren oft recht interessante zu entdecken, entdeckte zu beweisen. Wir begnügen uns mit ein paar Beispielen.

Theorem ν) (von Peirce). *Wenn*

$$ab \Subset c + d$$

ist, so muss auch:

$$ac_1 \Subset b_1 + d$$

sein [und desgleichen, mit demselben Rechte:

$$ad_1 \Subset b_1 + c, \qquad bc_1 \Subset a_1 + d, \qquad bd_1 \Subset a_1 + c, \qquad c_1d_1 \Subset a_1 + b_1,$$

sodass von allen sechs Subsumtionen eine jede die fünf übrigen nach sich zieht, mit jeder andern äquivalent ist]. *Es kann hienach ein Faktor des Subjekts mit einem Summanden des Prädikats vertauscht werden, sofern man nur beide in ihre Negationen umwandelt.*

Der Beweis des Theorems wird am einfachsten dadurch geleistet, dass man nach Th. $38_\times$) die Subsumtionen in Gleichungen umschreibt, wodurch die vorausgesetzte in $ab(c+d)_1 = 0$ oder wegen 36_+) in $abc_1d_1 = 0$, die behauptete in $ac_1(b_1 + d)_1 = 0$, das ist $ac_1bd_1 = 0$ übergeht, sonach die beiden ganz das nämliche besagen.

[Nun darf man in der Voraussetzung unbeschadet ihrer Gültigkeit

a mit b sowie auch c mit d vertauschen, und muss hiebei auch die Behauptung gültig bleiben. Thut man dies einzeln oder gleichzeitig, so erhält man aus der letztern sofort auch noch die drei folgenden von den behaupteten Subsumtionen, und geht die allerletzte dann nach dem Theorem selbst aus der vorletzten hervor, wenn man in ihr die Terme b und c vorschriftsmässig auf die andre Seite des Subsumtionszeichens wirft. Zum Überfluss folgt die eine Hälfte der sechs Subsumtionen auch aus der andern und so die letzte aus der ersten durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. 37) und 36).]

ξ) Exempel hiezu. In der Mannigfaltigkeit 1 der (ebenen) Kurven bedeute a die Klasse der *Kegelschnitte*, b die Klasse derjenigen *Kurven, welche einen „Mittelpunkt" haben*, c die Klasse der *Ellipsen* (mit Einschluss des Kreises) und d die Klasse der *Hyperbeln* (mit Einschluss des Geradenpaars, nämlich Paares *einander schneidender* Geraden), so ist die vorausgesetzte Subsumtion erfüllt, nämlich:

Kegelschnitte, welche einen Mittelpunkt haben, sind Ellipsen oder Hyperbeln. Nach dem Theoreme folgt: Kegelschnitte, welche nicht Ellipsen sind, müssen Hyperbeln sein oder (Kurven, die) keinen Mittelpunkt haben. Etc. etc.

Anmerkung. Das gegebene Beispiel kann benutzt werden um darzuthun, dass es nicht gestattet ist, die Subsumtionszeichen in dem Satze ν) durch Gleichheitszeichen zu ersetzen. Denn die vorausgesetzte Subsumtion gilt hier sogar als *Gleichung* (indem die Ellipsen nebst den Hyperbeln auch die Kegelschnitte sind, die einen Mittelpunkt haben), die gefolgerte Subsumtion aber nicht:

Kurven, die keinen Mittelpunkt haben (oder aber, resp.), sowie Hyperbeln, brauchen nicht Kegelschnitte zu sein, die nicht Ellipsen sind — sie brauchen nämlich überhaupt nicht Kegelschnitte zu sein.

o) Herr Peirce erblickt im obigen Satze ν) das wahre Wesen, die „Essenz" der Negation — was insofern begründet erscheint, als derselbe die hochwichtigen Theoreme 41) in sich vereinigt. Diese fliessen aus ihm, indem man $c = 0$ resp. $b = 1$ annimmt.

Man konnte auch umgekehrt das Th. ν) ganz unmittelbar auf die beiden einfacheren Theoreme 41) zurückführen.

Anstatt aus diesen setzt Peirce[5] p. 35, sein Theorem aus folgenden beiden Sätzen zusammen (*wie?* ist mir nicht recht ersichtlich):

Könnte nach einer Bemerkung von Lüroth das Peirce'sche Theorem ν)

$$(ab \Subset c + d) \Subset (ac_1 \Subset b_1 + d) \qquad \text{aus dessen Theoremen:}$$

$$o_\times) \quad (ab \Subset c) \Subset (ac_1 \Subset b_1) \quad \text{und} \quad o_+) \quad (a \Subset b + c) \Subset (b_1 \Subset c + a_1),$$

ja schon aus einem von ihnen, z. B. dem erstern $o_\times$), etwa wie folgt abgeleitet werden:

Wenn $ab \Subset c + d$ ist, so folgt nach jenem $a(c + d)_1 \Subset b_1$ oder $ac_1d_1 \Subset b_1$ und dies, durch beiderseitiges Addiren verbunden mit der aus Th. $6_\times$) ohnehin selbstverständlichen Subsumtion $ac_1d \Subset d$ gibt: $ac_1 \Subset b_1 + d$, q. e. d.

Theorem $o_\times$). *Wenn*

$$ab \Subset c$$

Theorem o_+). *Wenn*

$$a \Subset b + c$$

in der That *gesondert* in Glieder, welche z selbst und solche, welche z_1 enthalten. Die Glieder von beiderlei Art sind leicht aus dem Gesamtausdruck herauszulesen, wenn sie auch nicht (durchaus) beisammen stehen. Analog bezüglich des y sowie des x. Etc.

Zusatz 2 zu Th. 44_+) (Boole).

Alle Konstituenten der Entwickelung einer Funktion sind zu einander disjunkt, geben nämlich zu irgend zweien multiplizirt das Produkt 0, indem sie sich jedenfalls dadurch von einander unterscheiden müssen, dass mindestens ein Faktor des einen Konstituenten im andern durch seine Negation vertreten erscheint, wonach also das Th. $30_\times$) anwendbar wird.

So ist bei zwei Argumenten in der That:

$$xy \cdot xy_1 = 0, \qquad xy \cdot x_1 y = 0, \qquad xy \cdot x_1 y_1 = 0,$$
$$xy_1 \cdot x_1 y = 0, \qquad xy_1 \cdot x_1 y_1 = 0, \qquad x_1 y \cdot x_1 y_1 = 0.$$

Etc. Es wäre nicht uninteressant, doch etwas umständlich, das allgemeine Zutreffen dieser aus dem Bisherigen schon einleuchtenden Thatsache mittelst zwingender Schlüsse genauer darzulegen.

Ebenso gilt:

Die Summe aller Konstituenten ist stets gleich 1 — eine Aussage, die bei *einem* Argumente mit Th. 30_+), bei zwei Argumenten mit dem Th. 34_+) zusammenfällt (für a, b dort x, y gesagt). Bei dreien haben wir:

$$xyz + xyz_1 + xy_1z + xy_1z_1 + x_1yz + x_1yz_1 + x_1y_1z + x_1y_1z_1 = 1$$

Etc. Jene Konstituenten sind nämlich (allgemein) gerade die Glieder des ausmultiplizirten Produktes — cf. Th. 30_+):

$$1 = (x+x_1)(y+y_1)(z+z_1)\cdots,$$

welches als die Entwickelung der konstanten Funktion 1 nach $x, y, z, \cdots$ anzusehen sein wird.

Hat die Funktion n Argumente, so ist die Anzahl ihrer Konstituenten, somit auch der Glieder ihrer vollständig angeschriebenen Entwickelung gleich der n^{ten} Potenz von 2, gleich 2^n. Diese Anzahl ist also 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$ bei 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\cdots$ Argumenten.

Anmerkung 1 zu Th. 44_+).

Das duale Gegenstück zu diesem Theorem:

$44_\times$) Th. $\qquad f(x) = \{f(0)+x\}\{f(1)+x_1\}$

möge hier wenigstens einmal Erwähnung finden; erstmalig ist dasselbe von Herrn Peirce ausgesprochen.

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vom andern, Th. 44_+) gelieferten, ergibt sich nach ihm die interessante Formel:

$$\{f(0)+x\}\cdot\{f(1)+x_1\} = f(1)\cdot x + f(0)\cdot x_1.$$

Dieselbe würde als „zu sich selbst dual" zu bezeichnen sein, wenn man nur berechtigt wäre die Funktion $f(x)$ sich selber dual entsprechend zu nennen.

Ersetzt man $f(1)$ durch a und $f(0)$ durch b, wo dann a und b als *allgemeine* Gebiete werden aufgefasst werden dürfen, so erhält man jene Formel:

$$(a+x_1)(b+x) = ax + bx_1$$

von Peirce, die wir schon unter $\varkappa$) des § 18 betrachtet haben. —

Gleichwie das Th. 44_+) in eventuell wiederholter Anwendung benutzt werden konnte, um eine Funktion $f(x, y, z, \cdots)$ nach ihren Argumenten in eine Summe zu entwickeln, so kann dies auch mit Th. $44_\times$) geschehen behufs Entwickelung ebendieser Funktion in Gestalt eines Produktes. Diese letztere wird dann das duale Gegenstück der vorigen Entwickelung sein. Z. B. bei zwei Argumenten wird:

$$f(x,y) = \{f(0,0)+x+y\}\{f(0,1)+x+y_1\}\{f(1,0)+x_1+y\}\{f(1,1)+x_1+y_1\}.$$

Etc. Jene *erstere* Entwickelung war nach dem mathematischen Sprachgebrauch zu bezeichnen als (ein) *homogen*(er Ausdruck) in Hinsicht jedes einzelnen sowol, als jeder Gruppe, als auch der Gesamtheit der „Argumentsymbole" (falls in diese wir auch die Negationen der Argumente mit einrechnen); sie war nämlich dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Gliede immer *gleichviele* der betreffenden Symbole als Faktoren stehen. (Dabei ist jeder Argumentbuchstabe auch vertreten.)

Analog erscheint diese *letztere* Entwickelung in einer eigentümlichen, *der homogenen dual entsprechenden* Form, die sich dadurch kennzeichnet, dass jeder Faktor der Zerfällung immer von genannten Argumentsymbolen gleich viele als Summanden enthält (so zwar, dass in jedem Faktor auch jeder Argumentbuchstabe entweder in Gestalt des Argumentes selbst oder in Gestalt von dessen Negation als Glied vertreten ist, und dies im Ganzen auf jede mögliche Weise).

Lässt man *alle* in einem Ausdruck f überhaupt vorkommenden Buchstabensymbole als „Argumente" gelten, und entwickelt nach diesen gemäss Th. 44_+), so wird man eine Zerlegung jenes Ausdrucks f in seine „*letzten* Aggreganten" erhalten — in dem schon § 13 zu Th. 28) erörterten Sinne, jedoch in der Regel wol mit dem Unterschiede (vom Ergebniss der dort beschriebenen Prozesse), dass jetzt von den nach Th. 30_+) möglichen Zusammenziehungen von Gliedern, und dem Eingehenlassen überflüssiger Faktoren solcher, kein Gebrauch gemacht ist.

Analog kann man auch das Th. $44_\times$) benutzen, um die Zerfällung

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Der vorstehende Beweis lief mehr auf eine Probe der Richtigkeit, eine Verifikation des Satzes hinaus. Der folgende Beweis ist mehr „heuristisch", lässt auch erkennen, auf welchem Wege der Satz leicht zu entdecken war.

Beweis 2. Nach Th. 36) ist — zunächst bei *einem* Argumente:

$$(ax+bx_1)_1 = (ax)_1\,(bx_1)_1 = (a_1+x_1)\,(b_1+x) = xa_1 + a_1b_1 + b_1x_1 = a_1x + b_1x_1$$

wie nach dem Th. § 18, ι) oder $\varkappa$), oder endlich durch völlige Entwickelung des vorletzten Ausdrucks nach x gemäss Th. 44_+) unter Berücksichtigung des Absorptionsgesetzes einzusehen.

Nachdem so für *ein* Argument der Satz gewonnen ist, lässt er sich für zwei Argumente hieraus ableiten, wie folgt:

$$(axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1)_1 = \{(ay + by_1)\,x + (cy + dy_1)\,x_1\}_1 =$$
$$= (ay + by_1)_1\,x + (cy + dy_1)_1\,x_1 = (a_1y + b_1y_1)\,x + (c_1y + d_1y_1)\,x_1 =$$
$$= a_1xy + b_1xy_1 + c_1x_1y + d_1x_1y_1.$$

In derselben Weise fortschreitend wird der Satz für immer ein Argument mehr gewonnen [und allgemein für $n+1$ Argumente auf den vorher erledigten Fall von n Argumenten zurückgeführt].

Das Th. 46_+) gestaltet auch das Negiren der Funktionen zu einer bequemen Operation, sobald solche nur „entwickelt" worden.

Von manchen in meinem Operationskreis[2] gegebenen Sätzen, die ich später durch Herrn Peirce antizipirt, vorweggenommen fand, ist mir wenigstens dieses Theorem geblieben.

Exempel. $(ax + bx_1 + c)_1 = (a_1x + b_1x_1)\,c_1 = a_1c_1x + b_1c_1x_1.$

Exempel. Nach unserm Satze kann nun die Negation von $ab_1 + a_1b$ auf drei Arten hergestellt werden. Der Ausdruck ist nämlich entwickelt sowol nach a für sich, als auch nach b allein, als auch nach a und b zusammen. Im Hinblick auf ersteres bekommt man die Koeffizienten b_1 und b zu negiren, während man die Konstituenten a und a_1 stehen zu lassen hat; es entsteht:

$$(ab_1 + a_1b)_1 = ab + a_1b_1.$$

In der zweiten Hinsicht muss man die a und a_1 als die Koeffizienten gelten lassen, diese negiren, und b_1, b als Konstituenten unverändert lassen, wodurch $a_1b_1 + ab$ somit das gleiche Resultat entsteht.

In der dritten Hinsicht werden in:

$$ab_1 + a_1b = 0\cdot ab + 1\cdot ab_1 + 1\cdot a_1b + 0\cdot a_1b_1$$

die Koeffizienten 0, 1, 1, 0 zu negiren sein, wodurch sich

$$(ab_1 + a_1b)_1 = 1\cdot ab + 0\cdot ab_1 + 0\cdot a_1b + 1\cdot a_1b_1$$

also wiederum das alte Resultat ergibt.

Die letzte Betrachtung zeigt, dass *bei der Anwendung des Satzes eine Fehlerquelle verfänglich* ist: *man darf die etwa fehlenden Glieder*

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

$$(a_1 + x_1)(b_1 + x) = 1,$$

so träfe die letzte Regel nicht mehr zu, ebensowenig, wie es bei der ursprünglichen Form der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

der Fall war — indem ja nach derselben fälschlich $a_1 b_1 = 1$, resp. $a + b = 0$ entstehen würde. —

Ein bequemeres Eliminationsverfahren als das Fortlassen, *Auslöschen*, die Tilgung der Eliminanden ist nun überhaupt nicht denkbar.*)

Es ist deshalb bei Eliminationsaufgaben mitunter vorteilhaft zu operiren mit rechts auf 1 (anstatt auf 0) gebrachten Gleichungen (indem man links Aggregate, nach wie vor, Produkten vorzieht). Besonders wird dies — auch noch aus einem andern Grunde: der Interpretation halber — im Aussagenkalkul sich empfehlen.

ϑ) Lautet

$$f(x) = 0$$

eine nach x aufzulösende Gleichung, so entsteht durch Entwickelung des Polynoms derselben nach x gemäss Th. 44_+):

$$f(1) \cdot x + f(0) \cdot x_1 = 0$$

und ist daher:

$$f(0) \cdot f(1) = 0$$

die Resultante der Elimination von x und zugleich die Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichung nach x und für ihre mögliche Geltung.

Die Auflösung selbst würde heissen:

$$x = f(0) \cdot u_1 + f_1(1) \cdot u.$$

ι) Von praktischem Nutzen ist noch diese Bemerkung. Wir setzten beim Eliminiren bisher das Polynom der Gleichung als bezüglich des Eliminanden x (durch Entwickelung nach demselben) *homogen* gemacht voraus. Von dieser Voraussetzung ist es vorteilhaft, s. a unabhängig zu machen. Ist nämlich:

$$ax + bx_1 + c = 0$$

die Gleichung, aus welcher x zu eliminiren ist, wo die linke Seite als nicht homogene lineare Funktion jetzt ein Absolutglied c enthält, so würde diese Gleichung, homogen gemacht, lauten:

$$(a + c)x + (b + c)x_1 = 0$$

und gäbe nach der Regel:

*) Die Bemerkung ist wol, unter Leitung von Mr. Peirce, zuerst von Miss Ladd gemacht und von Mr. Mitchell noch weiter ausgedehnt worden.

fallen, für sich gleich 0 *gesetzt werden müssen* und so die Valenzbedingung für den Funktionsausdruck liefern.

Die vorstehende nähert sich der Art und Weise auf welche Boole seine inversen Operationsergebnisse ermittelte.

Die wesentlichsten in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse, seinerzeit im Operationskreis[2] von mir mitgeteilt, habe ich nachträglich als von Herrn Peirce in seiner Schrift[1a] schon früher veröffentlichte vorgefunden.

§ 24. Symmetrisch allgemeine Lösungen.

Die zur Vervollständigung der Theorie hiernächst von uns angestellten Betrachtungen können bei erstmaliger Lektüre des Buches überschlagen werden — es sei denn, dass der Anfänger sie benutzen wolle um sich im identischen Rechnen zu üben. Dieselben scheinen mir vorwiegend ein theoretisches Interesse zu besitzen — von eigentümlichem Reiz vielleicht für den Mathematiker — dagegen praktische Verwertbarkeit wol erst für eine fernere Zukunft in Aussicht zu stellen.

Ein nicht ganz leichtes Problem ist es, das uns hier noch zu beschäftigen hat, da seine Lösung unter Umständen wünschenswert erscheinen kann. Dasselbe bezieht sich auf den Fall, wo nach einer *Mehrzahl* von unbekannten Gebieten oder Klassen gleichzeitig gefragt wird.

Hier kam es darauf an, die sämtlichen Wertsysteme, und nur solche, anzugeben, welche für die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ in die vereinigte Gleichung des Problems bezüglich eingesetzt, dieselbe erfüllen.

In § 22, unter ϑ) sqq. *gelang uns dieses*, indem wir die vereinigte Gleichung nach dem System der Unbekannten allgemein auflösen, ihre Wurzeln wirklich „berechnen", d. h. unter Zuhülfenahme *arbiträrer* Parameter $u, v, w, \ldots$ Ausdrücke für dieselben aufzustellen lernten, welche bei beliebiger Deutung jener Parameter uns allemal ein System von Wurzeln, ein solches aber auf jede mögliche Weise, liefern mussten.

Zu dem Ende mussten aber die Unbekannten *successive* (eliminirt und in der umgekehrten Ordnung) *berechnet* werden und die für dieselben als Wurzeln erhaltenen Ausdrücke erwiesen sich nach ihrem ganzen Baue — „formell" — abhängig von der dabei eingehaltenen Reihenfolge.

Die zuerst berechnete Unbekannte enthielt z. B. in ihrem Ausdruck nur *einen* willkürlichen Parameter, die nach dieser berechnete dazu noch einen weiteren, mithin deren zweie, die nächstberechnete ihrer dreie, u. s. w. Es konnte auch vorkommen, dass bei der letzten Elimination (eine oder) mehrere Unbekannte auf einmal herausfielen. Diese mussten dann unbestimmt, willkürlich bleiben und waren durch *sie* hernach die übrigen Unbekannten auszudrücken. Auf diese Weise

wurden bei der Auflösung einzelne Unbekannte vor den andern *bevorzugt*, und solches war sogar der Fall, wenn auch die urspüngliche Aufgabe „*symmetrisch*" erschien bezüglich sämtlicher Unbekannten oder auch einer gewissen Gruppe von solchen, wenn die vereinigte Gleichung durch gewisse unter den Unbekannten vorgenommene Vertauschungen — in Verbindung vielleicht mit einer gleichzeitigen Vertauschung unter ihren *gegebenen* Parametern $a, b, c, \ldots$ — ungeändert blieb, nur in sich selbst transformirt wurde.

So ist z. B. die Gleichung $xy = 0$ bezüglich x und y symmetrisch. Elimination von y gibt $0 = 0$ (womit also auch x von selbst herausgefallen); mithin kann x als willkürlich hingestellt werden, und darnach berechnet sich dann: $y = vx_1$. Somit stellen uns die Gleichungen:

$$x = x, \qquad y = vx_1$$

bei beliebigem x und v in der That jedes System von Wurzeln vor; man könnte auch sagen:

$$x = u, \qquad y = vu_1$$

bei beliebigen u, v.

Hätten wir aber die umgekehrte Reihenfolge bei der Auflösung vorgezogen, so würden wir in Gestalt von $y = y$, $x = uy_1$, oder:

$$x = uv_1, \qquad y = v$$

zur Darstellung von ebendiesen Wurzelpaaren gelangt sein.

Eine gerechtfertigte, rationelle Anforderung ist es, nunmehr zu verlangen, dass die Darstellung für die Wurzelnsysteme von dem bei dem Auflösungsverfahren befolgten modus procedendi unabhängig erscheinen sollen, und dass insbesondere alle diejenigen *Vertauschungen* einerseits zwischen den Unbekannten $x, y, z, \ldots$ andrerseits zwischen den gegebenen Parametern $a, b, \ldots$ welche die *Data* des Problems ungeändert lassen, nämlich die vereinigte Gleichung desselben in sich selbst transformiren, auch das System der *Lösungen* nicht affiziren, nämlich die Darstellungen der verschiedenen Wurzeln nur *auf einander* zurückführen, wofern sie noch mit geeigneten Vertauschungen unter den neu hinzugekommenen Symbolen, den *willkürlichen* Parametern, verbunden werden.

Um diesen Anforderungen zu genügen, dürfen nun jedenfalls nicht mehr einzelne Unbekannte direkt durch andere von ihnen ausgedrückt werden, wo letztere unbestimmt bleiben; vielmehr müssen jetzt *alle* Wurzeln ausgedrückt werden lediglich durch die *gegebenen* Parameter $a, b, c, \ldots$ (oder die Koeffizienten der nach den Unbekannten entwickelten vereinigten Gleichung) und durch *willkürliche* oder „unabhängige" Parameter.

bezüglich der Merkmale A, B, C, D gegebene Auskunft verquickt erscheint mit einem andern Element E, über welches wir in den verlangten Schlussfolgerungen nichts zu sagen wünschen.

Es wird deshalb in erster Linie erforderlich sein, das dem Merkmal E entsprechende Klassensymbol e zu eliminiren aus dem System der Propositionen δ), in welches wir die Data eingekleidet haben.

Zu dem Ende bringen wir dieselben rechts auf Null — nach dem Schema der Theoreme $38_\times$) und 39_+) — und bilden gemäss Th. 20_+) — ihre „vereinigte Gleichung", indem wir, statt jeder einzelnen, sogleich die Summe ihrer linken Seiten gleich Null setzen. Dabei ist lediglich Sorge zu tragen, dass man die Negationen der vorkommenden Ausdrücke richtig ansetze, mit Rücksicht namentlich auf Th. 36) und 46_+). Die vereinigte Gleichung lautet:

$$\varepsilon)\quad a_1c_1(bd+b_1d_1+e_1)+ade_1(bc_1+b_1c)+a(b+e)(cd+c_1d_1)+(a_1+b_1e_1)(cd_1+c_1d)=0.$$

Die Resultante der Elimination von e besteht nun nach § 21, ι) aus dem von e und e_1 freien Gliede im Polynome dieser Gleichung:

$$a_1c_1(bd+b_1d_1)+ab(cd+c_1d_1)+a_1(cd_1+c_1d),$$

dessen erster Term a_1c_1bd noch in dem letzten a_1c_1d nach dem Absorptionsgesetze 23_+) eingeht, vermehrt um das Produkt der Koeffizienten, welche e und e_1 in ε) besitzen — das Ganze gleich 0 gesetzt.

Der Koeffizient von e ist aber: $a(cd+c_1d_1)$, der von e_1 ist desgleichen leicht aus ε) herauszulesen als:

$$a_1c_1+ad(bc_1+b_1c)+b_1(cd_1+c_1d);$$

das Produkt beider ist gleich:

$$adb_1c^*),$$

mithin die Resultante:

$$a_1(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)+a(bcd+bc_1d_1+b_1cd)=0,$$

oder durch Zusammenziehung zweier Terme:

$$\zeta)\qquad a(cd+bc_1d_1)+a_1(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)=0.$$

Diese schon recht übersichtliche Gleichung hat nun den Ausgangspunkt für unsere weiteren Betrachtungen zu bilden.

Man bemerkt zunächst, dass, betrachtet als „entwickelt" nach den Argumenten c und d, die Koeffizienten von a und a_1 in ζ) geradezu die Negationen von einander sind, meinem Theorem 46_+) gemäss

*) Miss Ladd hat[1] p. 58 darauf aufmerksam gemacht, dass Herr Wundt[1] p. 356 sq., indem er die auf b bezüglichen Schlüsse zieht, dieses Glied zufällig auslässt, weshalb dieselben falsch ausfielen; ich finde: nur unvollständig.

gebildet.*) Das Produkt dieser beiden Koeffizienten sowol als auch dasjenige ihrer beiden Negationen ist demnach gleich Null.

Um die *zweite* der gestellten Fragen zu beantworten und zugleich die Beantwortung der *ersten* Frage vorzubereiten, müssen wir jetzt a aus ζ) eliminiren. Dem Gesagten zufolge führt diese Elimination aber auf die Identität $0=0$, womit in Beantwortung jener *zweiten* Frage bewiesen erscheint: *dass zwischen den Merkmalen B, C und D für sich hinsichtlich ihrer An- oder Abwesenheit keine unabhängige Beziehung besteht.*

Die Gleichung ζ) ist demnach äquivalent ihrer „Auflösung" nach a.

Weil indess, wie bemerkt, auch das Produkt der Negationen der Koeffizienten von a und a_1 verschwindet, der eine Koeffizient die Negation des andern ist, muss hier der in § 21, σ) betrachtete Fall vorliegen: der in dem Ausdruck der Wurzel gemeinhin auftretende ein unbestimmtes Gebiet u enthaltende Term geht in den andern ein, die Gleichung hat nur *eine* Wurzel, die Unbekannte a ist durch die Gleichung eindeutig bestimmt, und zwar hat sie zum Ausdrucke den Koeffizienten ihrer Negation a_1 in der Gleichung, sodass ganz unmittelbar:

$$\eta)\qquad a=cd_1+c_1d+b_1c_1d_1$$

als die gesuchte Auflösung nach a erhalten wird.

Dieselbe könnte nebenbei gesagt auch in den Formen angesetzt werden:

$$\vartheta)\quad a=cd_1+c_1d+b_1c_1=cd_1+c_1d+b_1d_1=cd_1+c_1d+b_1(c_1+d_1),$$

die unbedingt mit dem Ausdruck η) äquivalent sind, vergl. § 18, β_1).

Die Gleichung η) beantwortet nun die *erste* der gestellten Fragen, und zwar, indem wir sie als Subsumtion vor- und rückwärts interpretiren, dahin: *wo immer das Merkmal A zu finden ist, muss auch das Merkmal C oder das D vorliegen, aber nicht beide zugleich, oder aber es müssen beide zusammen mit dem Merkmal B fehlen;* umgekehrt: *Wo die Merkmale B, C, D alle drei fehlen, sowie auch, wo von den Merkmalen C, D das eine ohne das andere vorliegt, da muss auch das Merkmal A sich finden.*

*) Die Bemerkung des Herrn Peirce in[5] p. 42, Z. 5 v. o. dass die in Gleichung ζ) über a, b, c, d enthaltene Information sich in: $a+cd+bc_1d_1=1$ zusammenziehen lasse, beruht auf einem Versehen. Will man die Gleichung rechts auf 1 bringen, so hat man nur die Koeffizienten von a und a_1 auszutauschen, und eine einfachere Fassung als die nachherige η) oder ϑ) lässt sich der Aussage nicht geben.

d. h. die grün gestreiften Muster bestehen aus allen, die zugleich rot, orange und schwarz gestreift sind, nebst einer unbestimmten Menge solcher (keinen, einigen oder allen solchen), die entweder nicht weiss gestreift sind, oder die schwarz, und zugleich nicht blau oder rot nebst orange, gestreift sind.

Bequemer wird sich dies in Gestalt der Doppelsubsumtion beschreiben lassen, welche darum für die Einkleidung der Lösung den Vorzug verdient:

$$ras \mathrel{\underline{\in}} g \mathrel{\underline{\in}} w_1 + s\,(b_1 + ra)$$

und zu erkennen gibt: dass die zugleich rot, orange und schwarz gestreiften Muster auch grün gestreift sein müssen. Jedes grün gestreifte Muster aber muss, falls es nicht weiss gestreift ist, sicher schwarz und entweder nicht blau, oder rot nebst orange gestreift sein.

Es versteht sich, dass vorstehend ein jeder Buchstabe nicht das Merkmal der betreffenden Farbe, sondern die Klasse der mit diesem Merkmal behafteten Objekte in unsrer Mannigfaltigkeit — der Tuchmuster — vorzustellen hatte. —

Man vergleiche auch die Lösung vorstehenden Problems nach Peirce's Methode in § 27. Das Problem ist auch behandelt von Grove (Educational Times, April 1881), Miss Ladd[1] p. 55 . . 57.

8. Aufgabe. (Lambert[3] I, 14.)

Wenn die x ohne die a einerlei sind mit den b, und die a ohne die x zusammenfallen mit den c, wie drückt sich x durch a, b und c aus?

Auflösung. Data sind:

$$a_1 x = b \quad \text{und} \quad a x_1 = c,$$

also in vereinigter Gleichung:

$$a_1 b_1 x + (a + x_1)\, b + a c_1 x_1 + (a_1 + x)\, c = 0.$$

Durch Elimination des x ergibt sich zunächst die Relation:

$$ab + a_1 c + (a_1 b_1 + c)\,(b + a c_1) = 0, \quad \text{oder:} \quad ab + a_1 c + bc = 0, \quad \text{oder:}$$

$$ab + a_1 c = 0$$

— vergl. Th. ι) des § 18 — wonach die Gleichung sich vereinfacht zu:

$$x\,(a_1 b_1 + c) + x_1\,(a c_1 + b) = 0$$

und nach x aufgelöst gibt:

$$x = a c_1 + b + u\,(a + b)\, c_1 = a c_1 + b,$$

indem der unbestimmte Term eingeht.

In Anbetracht, dass $bc = 0$ ist, also $b = b c_1 + bc = b c_1$ gesetzt werden kann, lässt sich dem Ergebniss auch die Gestalt geben:

$$x = (a + b)\, c_1$$

und lehrt dasselbe: die Klasse x besteht aus den a und den b, mit Ausschluss der c (was wir in § 23 mit $x = a + b - c$ dargestellt

haben würden, wonach es mit Lambert's Ergebniss buchstäblich übereinstimmte).

Wie Herr Venn[1] p. 272 bemerkt, besitzt vorstehende Aufgabe ein gewisses historisches Interesse als einer der frühesten Versuche, logische Aufgaben rechnerisch (in Symbolen) zu lösen, und reiht sich unter dem gleichen Gesichtspunkt hieran auch die folgende von Lambert behandelte Frage.

9. Frage. Wenn $ad = bc$ ist, lässt sich alsdann schliessen, dass $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sein müsse, d. h. wenn die a mit den d die nämlichen Individuen gemein haben, wie die b mit den c, muss dann jede (resp. überhaupt eine, resp. eine bestimmte) Klasse, welche durch b determinirt sich in a zusammenzieht, sich decken mit jeder (resp. etc.) Klasse, welche durch d determinirt c gibt?

Wie in den Klammern schon angedeutet, unterscheiden wir mehrerlei Auffassungen der Frage, für welche alle sie *verneinend* zu beantworten sein wird. Herr Venn l. c. konstatirt einen Irrtum Lambert's, welcher, obwol die Nichthebbarkeit beiderseits übereinstimmender Faktoren in einer Gleichung schon bemerkend, doch mehr als einmal annehme, dass es sich also verhalte (die Frage nämlich zu bejahen sei). Indessen gibt Venn selbst, unter Äusserung berechtigter Zweifel, eine unrichtige Beantwortung der Frage, indem er ihre Bejahung an die Bedingung knüpft, dass $a = c$ und $b = d$ sei — was sich bei einer jeden der Auffassungen nicht gerade als notwendig, eventuell als nicht hinreichend, herausstellen wird.

Um dies alles aufzuhellen, sei die Frage auch hier behandelt, obwol sie nicht ganz in den die übrigen Aufgaben umschliessenden Rahmen passt: wir wünschten mit § 23 die inversen Operationen des Kalkuls endgültig aus unserer Disziplin ausgemerzt zu haben, weshalb wir denn auch die Untersuchung auf gegenwärtigen Kontext beschränken.

Zur Unterscheidung von General- und Prinzipalwert des Quotienten greifen wir auf die Bezeichnungen des § 23 zurück.

Die Prämisse, rechts auf 0 gebracht lautet:

$$ad\,(b_1 + c_1) + bc\,(a_1 + d_1) = 0,$$

oder links nach a, b, c, d entwickelt

$$ad\,(b_1 c_1 + b_1 c + b c_1) + bc\,(a_1 d_1 + a_1 d + a d_1) = 0;$$

sie leugnet also die Existenz von sechsen der sechzehn zwischen a, b, c, d und ihren Negationen überhaupt denkbaren Kombinationen, welche die Mannigfaltigkeit 1 der Möglichkeiten zusammensetzen, wogegen sie über die zehn übrigen Kombinationen derselben nichts aussagt.

Soll nun *überhaupt ein* Wert von $a :: b$ übereinstimmen mit einem Werte von $c :: d$, so müssen zunächst die beiderseitigen Valenzbedingungen erfüllt sein, welche lauten: $ab_1 = 0$ und $cd_1 = 0$. Um die vereinigte Gleichung der letztern $ab_1 + cd_1 = 0$ nach allen vier Symbolen zu entwickeln, wird man am besten das Th. 33_+) links anwenden, wonach sie die Form annimmt:

$$ab_1 cd_1 + ab_1\,(c_1 + d) + cd_1\,(a_1 + b) = 0,$$

Dies gibt, nach c geordnet:

$$0 = \mathrm{Sa}\cdot bf_1 + \{\mathrm{Di}+\mathrm{Mi}\cdot f_1\}\, b\cdot c + \{(\mathrm{Di}+\mathrm{Mi})f + (\mathrm{Do}+\mathrm{Fr})\, f_1 + \mathrm{Sa}\}\, b_1\cdot c_1,$$

was zerfällt in die Resultante der Elimination auch noch von c:

$$\mathrm{Sa}\cdot bf_1 = 0$$

und in die beiden Subsumtionen:

$$\mathrm{Di}\cdot b + \mathrm{Mi}\cdot bf_1 \mathrel{\underline{\in}} c_1, \qquad (\mathrm{Di}+\mathrm{Mi})b_1 f + (\mathrm{Do}+\mathrm{Fr})b_1 f_1 + \mathrm{Sa}\cdot b_1 \mathrel{\underline{\in}} c.$$

In Beantwortung der gestellten Fragen haben wir demnach das Ergebniss:

Wenn am Di. oder Mi. f ohne b ausgeht, desgleichen, wenn am Do. oder Fr. b und f beide daheim bleiben, endlich, wenn am Sa. b zuhause bleibt, so muss c ausgehen.

Wenn am Di. b ausgeht, sowie wenn am Mi. b ohne f ausgeht, so muss c zuhause bleiben.

In jedem andern Falle kann c nach Belieben verfahren. Wie es aber auch verfahren möge, so wird am Sa. b nicht ohne f ausgehen dürfen.

Die vorstehende ist wol die komplizirteste von den Aufgaben des Denkrechnens, die bis jetzt überhaupt gestellt und gelöst worden sind.

28. Aufgabe. McColl, Math. Questions, Vol. 33, p. 22 .. 24, auch gelöst von C. J. Monro.

Ähnlich wie in der 11. Aufgabe mögen nachstehend die Buchstaben gedeutet werden als Klassen der Fälle, in welchen ein gleichnamiges Ereigniss eintritt. Dann soll beobachtet sein, dass:

$$abx \mathrel{\underline{\in}} cde, \quad bcy \mathrel{\underline{\in}} de, \quad c+d+e_1 \mathrel{\underline{\in}} (a_1+b+x)\,(b_1+c+y), \quad a_1 x = b_1 y.$$

Gesucht, wann ohne Rücksicht auf y das Eintreffen (resp. Eingetroffensein) oder Nichteintreffen des Ereignisses x verbürgt ist.

Auflösung. Elimination von y aus der vereinigten Gleichung der drei letzten Prämissen:

$$bc(d_1+e_1)y + (c+d+e_1)\,(ab_1x_1 + bc_1y_1) + a_1x(b+y_1) + (a+x_1)b_1y = 0$$

gibt:

$$a_1bx + ab_1(c+d+e_1)x_1 = 0,$$

und dies mit der ersten Prämisse (die y gar nicht enthielt) vereinigt:

$$(a_1+c_1+d_1+e_1)bx + ab_1(c+d+e_1)x_1 = 0.$$

Die Auflösung dieser Resultante nach x, mitnebst deren Konversion (d. h. ihrer Auflösung nach x_1):

$$ab_1(c+d+e_1) \mathrel{\underline{\in}} x \mathrel{\underline{\in}} acde + b_1, \quad (a_1+c_1+d_1+e_1)b \mathrel{\underline{\in}} x_1 \mathrel{\underline{\in}} a_1+b+c_1d_1e$$

lässt die Subjekte von x und x_1 (daneben ungefragt auch ihre Prädikate) erkennen — was leicht in Worten zu formuliren.

29. Aufgabe (Elizabeth Blackwood, Math. Quest. Vol. 35, 1881, p. 24 u. 25). Bekannt sei, dass jedes von den zusammengesetzten Ereignissen ayz, bzx, cxy von mindestens zweien der Ereignisse d, e, f begleitet (resp. gefolgt) ist und dass jedes von den zusammengesetzten „Nichtvorkommnissen" $d_1y_1z_1$, $e_1z_1x_1$, $f_1x_1y_1$ das Nichteintreffen von mindestens zweien der Ereignisse a, b, c bedingt. Welche Abhängigkeit folgt daraus zwischen dem Eintreffen oder Nichteintreffen der Ereignisse a, b, c, d, e, f ohne Rücksicht auf die x, y, z?

Auflösung (cf. McColl, Grove, und andere).

Die Prämissen sind:

$$ayz + bzx + cxy \mathrel{\underline{\in}} ef + fd + de, \quad d_1y_1z_1 + e_1z_1x_1 + f_1x_1y_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1.$$

Indem man das Polynom ihrer vereinigten Gleichung nach x, y, z entwickelte, und das Produkt der Koeffizienten $= 0$ setzte, ergäbe sich unschwer die gesuchte Resultante als: $abcd_1e_1f_1 = 0$.

Da dieses systematische Verfahren immerhin einige Schreiberei erforderte, wollen wir die Aufgabe durch einen Kunstgriff lösen, der noch einfacher ist als der von McColl etc. („by mere inspection") angewendete. Wir zerlegen jede der beiden Prämissensubsumtionen, deren Subjekt ja als Trinom erscheint gemäss Def. (3_+) in drei einzelne Subsumtionen, und werfen in einer jeden von diesen den Koeffizienten von links gemäss Peirce's Th. 41) nach rechts; so entsteht:

$$\begin{array}{llll}
yz \mathrel{\underline{\in}} ef + fd + de + a_1, & & y_1z_1 \mathrel{\underline{\in}} b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1 + d, \\
zx \mathrel{\underline{\in}} \;\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\; + b_1, & & z_1x_1 \mathrel{\underline{\in}} \;\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\; + e, \\
xy \mathrel{\underline{\in}} \;\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\; + c_1, & & x_1y_1 \mathrel{\underline{\in}} \;\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\; + f.
\end{array}$$

Addiren wir überschiebend jetzt diese sechs Subsumtionen und beachten, dass $y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1$ gerade die Negation von $yz + zx + xy$ ist, so erhalten wir:

$$1 \mathrel{\underline{\in}} a_1 + b_1 + c_1 + d + e + f,$$

oder:

$$abc \mathrel{\underline{\in}} d + e + f,$$

was zu finden gewesen.

30. Aufgabe † (Macfarlane, Math. Questions, Vol. 44, p. 48 .. 50). Aus den mit Worten gegebenen Data:

$$ax + b_1y = c, \quad dx_1(e+y) = f$$

sollen die Klassen x, y als Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt werden.

Die Auflösung soll hier mit allen Zwischenrechnungen gegeben werden. Aus der vereinigten Gleichung der Data:

$$(ax + b_1y)c_1 + (a_1+x_1)\,(b+y_1)c + df_1x_1(e+y) + (d_1+x+e_1y_1)f = 0$$

heben wir die Koeffizienten von y und y_1 hervor, und bilden ihr Produkt:

† Sehe S. 721.

nach den Regeln der Arithmetik berechnet. [Statt dessen konnte aber auch jenes Polynom erst nach w entwickelt werden in der Gestalt:

$$(1 - st)(1 - stp)w + stp(1 - w) = 0,$$

woraus dann:

$$w = \frac{stp}{stp - (1 - st)(1 - stp)}$$

sich berechnete.] Beidemal ergibt sich durch die mühsame „Entwickelung" der rechten Seite als einer Funktion $f(s, t, p)$ übereinstimmend:

$$w = stp + \frac{0}{0} st(1 - p),$$

als ein auch unmittelbar einleuchtendes Ergebniss: Die wirtschaftlichen Güter bestehen aus allen übertragbaren Genussmitteln von begrenztem Vorrat und einem unbestimmten Reste (indefinite remainder) von nur in begrenzter Menge zur Verfügung stehenden übertragbaren Dingen, die keine Genussmittel sind.

Der Leser hat vielleicht den Eindruck, dass Boole's Verfahren sich — in Praxi wenigstens — doch ziemlich stark von meiner Modifikation desselben unterscheidet. —

Vierzehnte Vorlesung.

§ 26. Besprechung noch andrer Methoden zur Lösung der bisherigem Kalkul zugänglichen Probleme.

Das primitivste oder Ausmusterungsverfahren von Jevons. Lotze's Kritik, und Venn's graphische Modifikation des Verfahrens.

Es handelte sich im bisherigen stets um Probleme, deren Data ausdrückbar sind durch Subsumtionen (oder Gleichungen*)) zwischen Klassen oder Funktionen des identischen Kalkuls von solchen, und deren Lösung dann ebenfalls wieder durch Aussagen von dieser Form darstellbar ist. Es kam dabei darauf an, gewisse Klassen aus den Daten des Problems zu eliminiren, andere aus denselben in dem in § 21, o) erläuterten Sinne zu berechnen, d. h. ihre Subjekte und Prädikate aufzufinden, welche vermittelst der übrigen Klassen sich beschreiben lassen.

Ehe wir mit nächster Vorlesung in Band 2 diesen Kreis unsrer Aufgaben erweitern, wollen wir noch ein Weilchen bei den bisherigen verweilen um uns über die verschiedenen Methoden zu orientiren, welche zur Bewältigung dieser Aufgaben vorgeschlagen worden sind und zur Verfügung stehen.

Als solche zählt Herr Peirce in seiner grundlegenden Arbeit[5] in chronologischer Folge auf: die Methoden von Boole, Jevons, Schröder, McColl, denen er alsdann noch eine fünfte selbst hinzufügt. Wir werden sehen, dass diese nur auf dreie „wesentlich" hinauslaufen, von denen die von mir modifizirte Boole'sche Methode im bisherigen schon dargelegt und ausschliesslich angewendet worden ist. Durch diese ihm zuteil gewordene Modifikation erscheint das ursprüngliche Verfahren Boole's nunmehr als vollständig antiquirt (superseded) und dürfte künftig niemand mehr je auf dasselbe zurückgreifen. In seiner abgeänderten Gestalt jedoch wird dasselbe, denke ich, wol fort-

---

*) Diese besonders zu erwähnen könnte unterbleiben, da nach Def. (1) eine Gleichung äquivalent ist einem Paar von Subsumtionen.

leben, obwol ihm neuerdings durch McColl und Peirce ein ebenbürtiges Verfahren an die Seite gestellt ist. —

Das Verfahren von Jevons ist zwar ein kunstloses — wenn man will, das nächstliegende oder ursprünglichste — doch verdient es immerhin als eine besondere Methode (die zweite von oberwähnten dreien) hingestellt zu werden.

Im wesentlichen besteht dasselbe kurz gesagt darin: *dass man für die sämtlichen Klassen, von denen im Problem die Rede ist, alle Möglichkeiten hinschreibt, welche in Bezug auf das Vorkommen oder Nichtvorkommen einer jeden in Verbindung mit den andern denkbar sind, von diesen denkbaren Kombinationen alsdann alle diejenigen ausstreicht, welche durch die Data des Problemes als unzulässige ausgeschlossen werden, und aus den stehen bleibenden endlich herauszulesen sucht die Antwort auf die Fragen, die das Problem aufwirft.*

Von Jevons[1] p. 44 sq. zuerst 1864 auseinandergesetzt, ist, wie Herr Venn[1] p. 351 bemerkt, derselbe Gedanke schon früher, 1811, auch von Semler[1] p. 48 angedeutet.

Der erste der drei im Jevons'schen „*Ausmusterungs*verfahren" geforderten Prozesse deckt sich mit der „*Entwickelung*" im Sinne des Th. 44_+) *der identischen* 1 — welche die ganze Mannigfaltigkeit vorstellt der Individuen oder Objekte auf die das Problem Bezug nimmt — nach den im Probleme vorkommenden Klassensymbolen als Argumenten. Die Glieder und Konstituenten dieser Entwickelung sind eben jene „Kombinationen", die alle hinsichtlich dieser Klassen denkbaren Möglichkeiten repräsentiren. Anstatt dieselben mittelst Pluszeichen unter sich zu verknüpfen und die so gebildete Summe ausdrücklich gleich 1 zu setzen, wird man gewöhnlich vorziehen, gedachte Kombinationen bequemer nur einfach untereinander zu schreiben.

Man beginnt demgemäss damit, als erste Kombination hinzuschreiben: das Produkt sämtlicher vorkommenden Klassensymbole (indem man, wo etwa eine Klasse nebst ihrer Negation in den Data des Problems erwähnt sein sollte, sich für eine von beiden, etwa für die affirmativ ausgedrückte entscheidet). In dieser ersten Kombination ersetzt man das letzte Symbol durch seine Negation und erhält die zweite Kombination; in beiden bisherigen Kombinationen ersetzt man das vorletzte Symbol durch seine Negation und erhält zwei weitere Kombinationen. Man fährt so fort in allen bisherigen Kombinationen immer ein früheres Symbol durch seine Negation zu ersetzen, bis dieses auch für das erste Symbol geschehen ist, so werden sämtliche Kombinationen angesetzt sein.

Die Zahl der letzteren ist 2^n, wenn n die Anzahl der vorkommenden Symbole gewesen — vergl. S. 418 — und jede dieser 2^n Kombinationen ist ein Produkt von n Faktoren, wobei als Faktor ein jeder von den im

Problem zu verwenden gewesenen Buchstaben entweder unnegirt als solcher steht oder aber durch seine Negation vertreten ist.

Um beispielsweise die 7. Aufgabe des § 25 nach Jevons' Methode zu behandeln, würde schon der Ansatz von $2^7 = 128$ Kombinationen (welche je aus sieben Symbolen sich zusammensetzen) erforderlich sein. Man wird sich schwerlich dazu verstehen, für $n > 6$ die Operationen noch praktisch durchzuführen.

In dieser mit wachsender Zahl n so rasch zunehmenden Weitläufigkeit der Prozesse liegt eine erste und grosse Schwäche der Methode.

Behufs Ausführung des zweiten von der Methode geforderten Prozesses muss man eine jede der angesetzten Kombinationen im Geiste zusammenhalten oder vergleichen sowol mit der linken Seite, dem Subjekte, als eventuell mit der rechten Seite, dem Prädikate einer jeden in Form einer Subsumtion gegeben gedachten Prämisse des Problemes. Man muss ja zusehen ob die Kombination mit der Prämisse *verträglich* ist, oder *nicht*, um — im letztern Falle — die Kombination *auszustreichen*. Dieses geht genauer dargelegt in folgender Weise vor sich.

Beide Seiten der Prämisse mögen wir als Aggregate von Monomen uns dargestellt denken, sodass

$$S + S' + \cdots \mathrel{\underline{\in}} P + P' + P'' + \cdots$$

die Form unsrer Prämisse ist, wo die Glieder $S, S', \ldots P, \ldots$ selbst Produkte sein werden von höchstens n Symbolen (in der Regel weniger), hervorgehoben aus der Gruppe der überhaupt im Problem vorkommenden (n) Klassensymbole $a, b, c, \ldots$ und ihrer (n) Negationen $a_1, b_1, c_1, \ldots$

Man hat sich nun zu erinnern, dass nach § 8, $\varkappa$) die Pluszeichen der Subsumtion links, im Subjekte, mit „*und*", rechts, im Prädikate aber mit „*oder*" in Worte zu übersetzen sind, mithin die Prämisse fordert, dass wo die in S vereinigte Faktorenkombination vorliegt, *sowol, als auch* wo die in S' vereinigte vorliegt, etc. da auch vorliegen muss *entweder* die in P *oder* die in P', *oder* die in P'', etc. vereinigt erscheinende Kombination von Faktoren.

In Bezug auf die mit dieser Prämisse zu vergleichende Kombination (aus der Menge der 2^n angesetzten) — K möge sie für den Augenblick heissen — können nun verschiedene Fälle vorliegen.

Entweder sie ist — nach Th. $6_\times$) oder Prinzip I — einem der Subjekte $S, S', \ldots$ (eventuell auch gleichzeitig deren mehreren) eingeordnet, d. h. die sämtlichen Faktoren, aus denen sich eins dieser Subjekte zusammensetzt, treten auch als Faktoren in K auf, oder nicht.

Im letztern Falle treffen schon die Voraussetzungen der Prämisse für unsere Kombination K nicht zu, die Prämisse berührt die Kom-

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

zur Anlegung der Figur 30, aus welcher auf den ersten Blick einleuchtet, dass

$$y = 0$$

der ganze logische Gehalt (import) des Prämissensystems sein muss.

In der That erhalten wir dieses Ergebniss auch als dessen „vereinigte Gleichung", welche hiernach zusammenfallen wird mit der Resultante der Elimination von x, z oder w — einzeln, oder in einer Partie, oder insgesamt — aus dem Prämissensysteme.

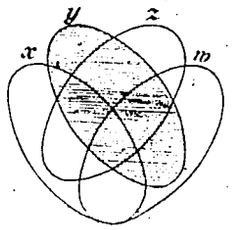


Fig. 30.

Vergl. auch Math. Quest. vol. 34 p. 51, wo dieselbe Aufgabe mit vertauschtem x und y gestellt und — umständlicher — von McColl gelöst ist.

Dagegen löst sie auf die vorstehende Weise Herr R. Harley, ibid. p. 74.

§ 27. Methoden von McColl und Peirce.

Die Methode, welche Herr Peirce in seiner grundlegenden Arbeit[5] p. 37 .. 42 als fünfte — meiner Auffassung nach: dritte — den übrigen hinzufügt, ist äusserst beachtenswert und genial, wenn auch seine Darstellung derselben einzelnes zu wünschen lässt.

Ich möchte das Verhältniss dieser Methode zur modifizirten Boole'schen vorweg im Bilde charakterisiren. Bei dieser wurden die verschiedenen Knäuel der Prämissen oder Data des Problems erst fest zu einem einzigen Knoten geschürzt (der vereinigten Gleichung) und dieser dann durchhauen (bei der Elimination).

Beim Peirce'schen Verfahren aber werden jene Knäuel in ihre dünnsten Fäden auseinandergelegt und die erforderlichen einzeln zerschnitten (oder auch neu nach Bedarf verknüpft) — wogegen die Jevons'sche Methode sogleich ein Häcksel aus dem Ganzen machte! Ich denke zu zeigen, dass durch eine geringfügige Abänderung der Peirce'schen Tendenz unter Beibehaltung seiner Schlussweisen, indem man nämlich jene Knäuel immer nur so weit auseinandernimmt, als erforderlich, um den Eliminanden resp. die Unbekannte frei zu bekommen, dasjenige Verfahren entsteht, welches für gewöhnlich den Vorzug verdienen dürfte — wobei sich das Verfahren aber dem McColl'schen genähert haben, nicht mehr allzuweit von demselben verschieden sein wird.

Wenn Herr Peirce von seiner Methode sagt, dass sie „perhaps is simpler and certainly is more natural than any of the others", so muss ich ihm in Bezug auf die grössere Natürlichkeit Recht geben,

von b (somit b_1) blos aus den von b freien Subsumtionen dieser Gruppe besteht, die sich in

$$cd_1 + c_1 d \mathrel{\underline{\in}} a \mathrel{\underline{\in}} c_1 d_1 + cd_1 + c_1 d \quad \text{oder} \quad c_1 + d_1$$

zusammenziehen. Auch liest man sofort heraus die Auflösung nach b_1:

$$a\,(cd + c_1 d_1) \mathrel{\underline{\in}} b_1 \mathrel{\underline{\in}} a + c + d,$$

woraus sich diejenige nach b durch Umstellen der Terme, oder auch beiderseitiges Negiren ergibt zu:

$$a_1 c_1 d_1 \mathrel{\underline{\in}} b \mathrel{\underline{\in}} a_1 + cd_1 + c_1 d,$$

wo letzteres Prädikat (nur) mit Rücksicht auf die vorhergehende Relation (zwischen a, c, d) auch in $a_1 + c + d$ zusammenziehbar ist (indem man ihm $a_1 cd$ ohnehin, aber auch noch acd, welches 0 ist, zufügen kann).

So gelangten wir also zu den früheren Ergebnissen.

Es möge ferner noch die 7. Aufgabe des § 25 (von Boole) entsprechend behandelt werden. Die Prämissen waren:

$$wg \mathrel{\underline{\in}} se, \qquad ra \mathrel{\underline{\in}} be, \qquad se \mathrel{\underline{\in}} wg, \qquad be \mathrel{\underline{\in}} ra$$

und werden im Hinblick auf die beabsichtigte Elimination von e zu schreiben sein:

$$wg \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} s \\ e \end{cases}, \qquad ra \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} b \\ e \end{cases}, \qquad e \mathrel{\underline{\in}} wg + s_1, \qquad e \mathrel{\underline{\in}} ra + b_1,$$

oder

$$wg \mathrel{\underline{\in}} s, \qquad ra \mathrel{\underline{\in}} b, \qquad \left.\begin{matrix} wg \\ ra \end{matrix}\right\} \mathrel{\underline{\in}} e \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} wg + s_1 \\ ra + b_1 \end{cases},$$

mithin stellt das System:

$$wg \mathrel{\underline{\in}} s, \qquad ra \mathrel{\underline{\in}} b, \qquad wg \mathrel{\underline{\in}} ra + b_1, \qquad ra \mathrel{\underline{\in}} wg + s_1$$

die Resultante der Elimination von e vor.*)

Um die Elimination und Berechnung von g vorzubereiten, schreiben wir letzteres:

$$g \mathrel{\underline{\in}} \begin{cases} s + w_1 \\ ra + b_1 + w_1 \end{cases}, \qquad ra \mathrel{\underline{\in}} b, \qquad \begin{matrix} ras \mathrel{\underline{\in}} w \\ ras \mathrel{\underline{\in}} g \end{matrix},$$

woraus folgt:

$$ras \mathrel{\underline{\in}} g \mathrel{\underline{\in}} (s + w_1)\,(ra + b_1 + w_1) \quad \text{oder} \quad w_1 + s\,(ra + b_1)$$

wie früher — eine Behandlung, die mir derjenigen des § 25 entschieden vorzuziehen scheint.

Ich meine gleichwol, dass das von mir modifizirte Verfahren Boole's durch diese neue Methode keineswegs überflüssig gemacht wird. Nicht nur behält es den einen Vorzug, dass man dabei mehr rein mechanisch — um nicht zu sagen: gedankenloser — zuwerke gehen kann, womit ich mir zum Teil den Umstand erkläre, dass, wie Herr Peirce seinerzeit mir schrieb,

*) Es wird, wie hier, nicht selten vorzuziehen sein, dass man beim Eliminiren die Einzelresultanten unvereinigt lasse.

seine Schüler mein Verfahren dem seinigen vorzuziehen pflegten, sondern auch zum vollen Verständniss der ganzen Disziplin wird dasselbe stets unentbehrlich bleiben. Endlich kann man auch die *an jeder einzelnen* Prämissensubsumtion zu vollziehenden Operationen der Auflösung und Elimination mindestens geradesogut nach jenem Boole'schen Schema ausführen, als nach der vorstehend illustrirten Peirce'schen Methode, wie eine vergleichende Bearbeitung der typischen 18. Aufg. des § 25 nach den beiden Manieren zu erkennen gibt. —

Das Verfahren, welches Herr McColl ganz selbständig, indessen immerhin sehr nachträglich, zur Lösung der Probleme des Boole'schen Kalkuls ersonnen, ist doch nicht ganz so sehr, wie er selbst glaubt, von dem modifizirten Boole'schen verschieden — und muss ich hierin Herrn Venn[1] p. 372 beipflichten (vergl. ebenda). Sofern nur *eine* Prämisse in Betracht kommt — und die Boole'schen Prämissen lassen sich ja stets in eine einzige zusammenziehen — möchte ich dasselbe überhaupt nicht als eine neue Methode, sondern höchstens als eine eigene „Manier" in der Anwendung der Boole'schen Methode gelten lassen*)

Ein Fortschritt tritt erst da zutage, wo es sich um Elimination und Auflösung bei *Systemen* Boole'scher Prämissen handelt und ist eben darin zu erblicken: dass McColl *deren vorgängige Vereinigung zu einer einzigen Prämissengleichung entbehrlich macht*, womit er denn Peirce vorgearbeitet und eine neue Behandlungsweise der Probleme angeregt, mitbegründet hat.

Vorwiegend scheinen mir Herrn McColl's Verdienste auf einem andern Felde zu liegen: auf dem der *Anwendungen* — worüber u. a. unser Anhang 7 zu vergleichen ist.

McColl's Verfahren basirt auf den beiden Gleichungen:

$$x\,f(x) = x\,f(1) \quad \text{und} \quad x_1 f(x) = x_1 f(0),$$

welche wir schon in § 19 als Anm. 2 zu Th. 44_+) angeführt haben, und die er auch für beliebig viele Argumente zusammenfassend erweitert zu dem Satze:

$$xyz\cdot\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot f(x, y, z\cdot\cdot u, v, \cdot\cdot) = xyz\cdot\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot f(1, 1, 1, \cdot\cdot, 0, 0, \cdot\cdot).$$

Die Gültigkeit auch dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich aus der allgemeinen Boole'schen Formel 44_+) für die Entwickelung einer Funktion $f(x, y, z, \cdot\cdot u, v, \cdot\cdot)$ beliebig vieler Argumente nach ebendiesen — in Anbetracht, dass bekanntlich $f(1, 1, 1\cdot\cdot 0, 0, \cdot\cdot)$ der Koeffizient ist, mit welchem der Konstituent $xyz\cdot\cdot u_1 v_1 \cdot\cdot$ in jener Entwickelung behaftet erscheinen wird, und dass die übrigen Glieder derselben Entwickelung, als mit dem angegebnen disjunkte Konstituenten habend, in diesen multiplizirt verschwinden müssen.

*) Die vom Verfasser abgegebenen Urteile über Mac Coll's „Methode(n)" in Bd. 2, S. 305 noch eine wesentliche Modifikation erfahren (vergl. demnächst auch den Rückblick im § 54).

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

$\varphi(0)\,\varphi(1)\,\psi_1(0)\,\psi_1(1) = 0$ resp. $1 = \varphi_1(1) + \varphi_1(0) + \psi(1) + \psi(0)$ — oder auch $\Subset$ für $=$ geschrieben.

Ich denke, man erkennt, dass dies nur eine andere Manier ist, zu derselben Resultante zu kommen, zu welcher Boole gelangen würde, indem er die Gleichung $\varphi(x)\,\psi_1(x) = 0$ links nach x entwickelte und das Produkt der Koeffizienten $= 0$ setzte.

Verbünde man dagegen diagonal oder über's Kreuz je zwei Subsumtionen aus den beiderlei Zeilen vermittelst des Syllogismus Barbara (oder Prinzips II) um x oder x_1 zu eliminiren, so würde sich diese Resultante auf eine dem Verfahren von Peirce näher kommende Weise ergeben in den Formen:

$$\varphi(0)\,\psi_1(0) \Subset \varphi_1(1) + \psi(1), \qquad \varphi(1)\,\psi_1(1) \Subset \varphi_1(0) + \psi(0).$$

Die beiden Subsumtionen *einer* (der ersten) *Zeile* aber stellen für McColl die *Auflösung* nach der Unbekannten x vor — wofür meines Erachtens wieder diejenigen der Hauptdiagonale den Vorzug verdienen würden, gleichwie dann auch die Subsumtionen der Nebendiagonale die Auflösung nach x_1 am besten darstellen werden. —

Die Art, wie hienach McColl mit *Systemen* von Subsumtionen operirt, erhellt aus folgendem.

Nachdem jede einzelne von den gegebenen Prämissensubsumtionen, wie oben gezeigt in zweie von der Form $\alpha \Subset x$, $\beta \Subset x_1$ aufgelöst, zerfällt ist, können wir als unser Prämissensystem ansehen:

$$\alpha^1 \Subset x, \quad \alpha^2 \Subset x, \cdots, \quad \alpha^n \Subset x,$$
$$\beta^1 \Subset x_1, \quad \beta^2 \Subset x_1, \cdots \quad \beta^n \Subset x_1,$$

und lassen diese n Paare nach Def. (3_+) sich zusammenziehen:

$$\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots \alpha^n \Subset x,$$
$$\beta^1 + \beta^2 + \cdots \beta^n \Subset x_1,$$

welche beiden Subsumtionen zusammen dessen „Auflösung" nach x vorstellen, wogegen deren überschiebend gebildetes Produkt:

$$(\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)\,(\beta^1 + \beta^2 + \cdots \beta^n) \Subset 0$$

die Resultante der Elimination des x sein wird.

Ein Beweis für die Vollständigkeit dieser Resultante — nämlich der $\alpha\beta = 0$ für die Prämissen $\alpha \Subset x$, $\beta \Subset x_1$ — wäre nach unsern Betrachtungen in § 21 leicht zu erbringen (resp. ist dortselbst implicite bereits erbracht), ist jedoch von McColl nicht gegeben.

Nach vorstehendem Schema behandelt McColl verschiedene Probleme, namentlich von Boole, darunter auch die bekannte 1. Aufgabe des § 25 und diese mittelst zwei (ein halb) Druckseiten Rechnung. Irgendwelche Vorteile in Hinsicht der Druckersparniss, Vermehrung

THIS PAGE LEFT BLANK INTENTIONALLY

Melanchthon 568; Mill, John Stuart V, 2, 3, 26, 32, 36, 44, 52, 54, 55, 60, 62, 63, 86, 92, 106, 122, 152, 177, 222; Miller 393; Milton 370; Mitchell 120, 457; Monro 393, 552; Müller, Max 46, 349.
Papin 125; Peano 710, 713; Peirce, Benjamin 302; Peirce, Charles S. III, 92, 96, 107 ... 113, 115, 116, 119, 120, 133, 140, 141, 191, 193, 194, 211, 243, 253, 257, 274 ... 276, 285, 290, 291, 297, 301, 302, 314, 350, 353, 354, 363 ... 365, 376, 378, 379, 418, 419, 423, 457, 496, 525, 532, 553, 559, 560, 573, 588, 589, 591; Platon 88; Ploucquet 119; Port-Royal 122; Porphyrius cf. Malchos; Prantl 101, 224, 715.
Riehl 24; Riemann 33, 34, 712.
v. Scheffel 143; Scheffler 568, 569; Schlegel, Victor 679; Schlömilch 681; Schlötel 711 sq; Schiaparelli XI, 110; Schiel 26, 62; Schiller 149; Schopenhauer 26, 81; Schubert, Hermann 139, 189; Schultheiss 95; Shakespeare 182, 370; Semler 560; Senior 557; Servois 283; Sigwart V, 2, 3, 8, 9, 11...13, 15, 16, 82, 86, 90, 92, 106, 115, 126, 142, 154, 244, 320, 325, 326, 329, 331, 333 ... 335, 346, 350; Silesia 77; Sohncke, Leonhard 629; Spencer 26; Spinoza 23; de Staël 24; Stas XI, 163; Steinthal 4, 97; Stolz 609; 612; Stringham 679.
Tanner 536; Taylor 411; Tennyson 370; Tertullian 33; Thales 124; Thomae 712; Trede 94; Trendelenburg 38, 40, 46, 56, 93, 94.
Ueberweg 4, 33, 84, 104, 105, 155, 177, 715.
Venn 121, 244, 263, 270, 354, 365, 366, 369, 370, 392, 528, 533, 536, 540...542, 546, 559, 560, 569 .. 572, 589; Vieta 95; Vives 155; Voigt 449.
Weber, Heinrich 26, 139; Weierstrass 441; Weise 155; Weismann 108; Whately 2; Whewell (gesprochen: Wjuil) 33; Wilkins 94; Wundt 177 ... 179, 223 ... 225, 274, 325, 524.
Zöllner 34.