

II. BETA PART.

8. The beta part adds to the alpha part certain signs to which new permissions are attached, while retaining all the alpha signs with the permissions attaching to them.

9. The *line of identity* is a Graph any replica of which, also called a line of identity, is a heavy line with two ends and without other topical singularity (such as a point of branching or a node), not in contact with any other sign except at its extremities. Otherwise, its shape and length are matters of indifference. All lines of identity are replicas of the same graph.

10. A *spot* is a graph any replica of which occupies a simple bounded portion of a surface, which portion has qualities distinguishing it from the replica of any other spot; and upon the boundary of the surface occupied by the spot are certain points, called the *hooks* of the spot, to each of which, if permitted, one extremity of one line of identity can be attached. Two lines of identity cannot be attached to the same hook; nor can both ends of the same line.

11. Any indefinitely small dot may be a spot replica called a *spot of identity*, and three lines of identity may be attached to such a spot. Two lines of identity one outside a cut and the other on the area of the same cut may have each an extremity at the same point on the cut. The totality of all the lines of identity that join one another is termed a *ligature*. A ligature is not generally a graph, since it may be part in one area and part in another. It is said to lie within any cut which it is wholly within.

12. The following are the additional permissions attaching to the beta part.

CODE OF PERMISSIONS, — Continued.

Permission No. 8. All the above permissions apply to all spots and to the line of identity, as Graphs 1 and Permission No. 2 is to be understood as permitting the erasure of any portion of a line of identity on the sheet of assertion, so as to break it into two. Permission No. 3 is to be understood as permitting the extension of a line of identity on the sheet of assertion to any unoccupied part of the sheet of assertion. Permission No. 3 must not be understood that because it is permitted to scribe a graph without certain ligatures, therefore it is permissible to scribe it with them, or the reverse.

Permission No. 9. It is permitted to scribe an unattached line of identity on the sheet of assertion, and to join such unattached lines

ter
in any number by spots of ~~identity~~ identity. This is to be understood as permitting a line of identity, whether within or without a cut, to be extended to the cut, although such extremity is to be understood to be on both sides of the cut. But this does not permit a line of identity within a cut that is on the sheet of assertion to be retracted from the cut, in case it extends to the cut.

Permission No. 10. If two spots are within a cut (whether on its area or not), and are not joined by any ligature within that cut, then a ligature joining them outside the cut is of no effect and may be made or broken. But this does not apply if the spots are joined by other hooks within the cut.

Permission No. 11. Permissions Nos. 4 and 5 do not cease to apply because of ligatures passing from without the outer of two cuts to within the inner one, so long as there is nothing else in the annular area.

O 01037

← as implying [K L K]

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER AKADEMIE DER
WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHTGENOSSEN

VIERTER BAND IN VIER TEILBÄNDEN

MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON

FELIX KLEIN[†] UND CONRAD MÜLLER

IN GÖTTINGEN

IN HANNOVER

ZWEITER TEILBAND



LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1904—1935



IV 7. DIE MECHANIK DER EINFACHSTEN
PHYSIKALISCHEN APPARATE
UND VERSUCHSANORDNUNGEN.

VON

PH. FURTWÄNGLER

IN POESDAM.

Inhaltsübersicht.

1. Vorbemerkung.
 - I. Das Pendel.
 2. Relative und absolute Messungen.
 - A) Die Schwingungsdauer des Pendels.
 3. Die Fundamentalformel für die Schwingungsdauer des Pendels.
 4. Die Bestimmung der Schwingungsdauer.
 - B. Die störenden Einflüsse.
 5. Der Einfluss der endlichen Amplitude.
 6. Der Einfluss des umgebenden Mediums.
 7. Das Mitschwingen des Stativs, des Pfeilers und Untergrundes.
 8. Der Einfluss der Aufhängung. Das Gesetz der Amplitudenabnahme.
 9. Die Elastizität der Pendel.
 10. Der Einfluss der Temperatur.
 - C) Die Methoden zur Bestimmung von g mit Hilfe des Pendels.
 11. Zwei Fadenpendel von verschiedener Länge.
 12. Das symmetrische Reversionspendel.
 13. Die Messung des Scheitelpunktes.
 14. Spezielle Fehlerquellen des Reversionspendels.
 15. Benutzung von zwei Reversionspendeln.
 16. Resultate einiger absoluten Schwerkraftmessungen.
 17. Einleitung.
 - A) Theorie der Wage.
 18. Prinzip der Wage.
 19. Empfindlichkeit.
 20. Fehler der Scheitellage.
 21. Konstruktion des Gehänges.

Encyklop. d. math. Wissensch. IV 7, II

22. Homogenität und Elastizität des Wagebalkens.
23. Die Schneiden und Pfannen.
24. Bewegung der Wage.
25. Mathematische Darstellung gestörter pendelartiger Schwingungen

B) Theorie der Wägung.

26. Methoden von *J. C. Borda* und *C. F. Gauss*.
27. Bestimmung der Gleichgewichtslage.
28. Beobachtungsfelder.
29. Fehler, die aus Veränderungen der Wage und äusseren Umständen folgen.
30. Übergang von den bewegenden Kräften zu den Massen.
31. Gewichte.
32. Genauigkeit von Wägungen.

III. Versuche zum mechanischen Nachweis der Erdrotation.

A) Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Lotlinie.

33. Formel für die östliche Abweichung.
34. Berücksichtigung des Luftwiderstandes.
35. Versuche.

B) Einfluss der Erdrotation auf die Bewegung des frei schwingenden Pendels.

36. Differentialgleichungen und Resultat einer angenäherten Integration für das mathematische Pendel.
37. Störende Einflüsse.
38. Weitere Annäherungen.
39. Benützung des physischen Pendels.
40. Versuche.
 - a. Der *Foucault'sche* Pendelversuch.
 - b. Der *Breuis'sche* Pendelversuch.
41. Das *Gauss'sche* Pendel.
 - a. Theorie.
 - b. Theorie und Versuche von *H. Kummerlingh-Onnes*.

C) Versuche mit Gyroskopen.

42. Das *Foucault'sche* Gyroskop.
43. Das *Gilbert'sche* Barogyroskop.
44. Der Versuch von *A. Föppl*.

Literatur.

I. Das Pendel.

A) Bibliographisches.

- O. Borch*, Geodätische Literatur, auf Wunsch der Permanenten Kommission im Zentralbureau zusammengestellt, Berlin 1889.
- J. H. Gore*, A bibliography of geodesy. Second edition. Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey 1901-1902, Washington 1903, Appendix Nr. 8, p. 429.
- J. Hirschel*, A bibliographical list of works relating to pendulum operations in

connection with the problem of the figure of the earth. Operations of the great trigonometrical survey of India 5 (1879), Appendix 5.

C. Wolf, Collection de mémoires relatifs au pendule, Collection de mémoires relatifs à la physique 4 (1889) und 5 (1891) (Collection); darin: Bibliographie du pendule 4 (1889), p. B1-B216 (*Wolf*, Bibl.) - Introduction historique 4 (1889), p. 1-XLII (*Wolf*, Introduction).

B) Einige der wichtigeren Publikationsorgane.

Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts zu Wien (Militär-geograph. Inst. Wien).

Reports of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey, Washington (U. S. Survey).

(Neben den genannten sind noch die Publikationen der geodätischen Behörden verschiedener anderer Länder wie England, Frankreich, Italien, Spanien u. s. w. anzuführen.)

Verhandlungen der Allgemeinen Konferenzen der Europäischen Gradmessung, Berlin. (Von 1856 ab der Internationalen Erdmessung.) (Verhandlg. Konf.)

Verhandlungen der Permanenten Kommission der Europäischen Gradmessung, Berlin (Perm. Komm.)

Veröffentlichungen des Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung (Veröffentl. Zentralbureau).

Veröffentlichungen des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes (Veröffentl. Preuss. Geod. Inst.).

C) Monographien und Journallitteratur.

J. M. Barraquer, Determinación experimental de la intensidad de la fuerza de gravedad en Madrid, Mem. del inst. geogr. y estad. 8 (1859).

E. Bascari and *W. J. Heaviside*, Account of operations of the great trigonometrical survey of India 5 (1879). Details of the pendulum operations by Captains *Bascari* and *Heaviside*, and of their reduction (Survey of India 5).

E. W. Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels, Berl. Abhandlg. 1826 - Collection 4, p. 121 - *Astwald's* Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 7, Leipzig 1889 (*Bessel*, Sekundenpendel).

- Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, Berl. Abhandlg. 1830 - Collection 5, p. 71 (*Bessel*, Anziehungskraft).

- Konstruktion eines symmetrisch geförnten Pendels mit reziproken Axen, Astr. Nachr. 30 (1849).

J. C. Borda et *J. D. Cassini*, Expériences pour connaître la longueur du pendule, qui bat les seconds à Paris. Enthalten in: Base du système métrique décimal. T. III, Paris 1810 - Collection 4, p. 17 (*Borda*).

Ch. Defforges, Observations du pendule, Mémorial du dépôt général de la guerre, 15 (1834) (*Defforges*, Observations).

F. R. Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, Veröffentl. Preuss. Geod. Inst. und Zentralbureau, Potsdam 1898 (*Helmert*, Beiträge).

H. Kater, An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London, Lond. Phil. Trans. 108 (1818) - Collection 4, p. 77 (*Kater*, Pendulum).

G. Lorenzini, Relazione sulle esperienze istituite nel R. osservatorio astronomico

- di Padova in Agosto 1885 e Febbraio 1886 per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi, Roma 1888 (Lorenzoni, Relazione).
- T. C. Mendenhall, Determinations of gravity with the new half second pendulums of the coast and geodetic survey, U. S. Survey 1891, part II, Appendix Nr 15, p. 503-564 (Mendenhall, Determinations of gravity).
- Th. v. Oppolzer, Bericht über die Bestimmung der Schwere mit Hilfe verschiedener Apparate, Verhandlg. Konf. (Rom) 1883, Annex VIa, p. 12 — Ztschr. f. Instr. 4 (1884), p. 303 u. 379 (v. Oppolzer, Bericht).
- C. v. Offf, Bestimmung der Länge des einfachen Sekundependels auf der Sternwarte zu Bogenhausen, Münch. Abhandlg. 14 (1883), Abteilung 3 (v. Offf).
- C. S. Peirce, Methods and results of measurements of gravity at initial stations in America and Europe, U. S. Survey 1876, Appendix Nr. 15 (Peirce, Methods).
- G. Pisati ed E. Pucci, Ricerche sulla lunghezza del pendolo a secondi, Atti della R. Accad. dei Lincei, Memorie (3) 15 (1882-83), Pisati.
- F. Ricca, Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi in Roma. Esperienze eseguite dal prof. G. Pisati ed E. Pucci, Bollett. 59 (1) (1894).
- G. G. Stokes, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Cambridge Phil. Trans. 9, II (1856), p. 8 — Mathem. and phys. papers 3 (1901), p. 1 — Collection 5, p. 277 (Stokes, Pendulums).
- Veröffentlichung des Kgl. Preussischen Geodätischen Instituts: Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe, Berlin 1896 (Schwerkraft von Kolberg bis zur Schneekoppe).

H. Die Waage.

A) Einige der wichtigeren Publikationsorgane.

- Metronomische Beiträge, herausgegeben von W. Förster, Berlin.
- Die Fortsetzung erscheint unter dem Titel:
Wissenschaftliche Abhandlungen der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission, Berlin (Abhandlg. Normal-Eichungs-Komm.)
- Travaux et memoires du bureau international des poids et mesures, Paris (Travaux).
- Wissenschaftliche Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin. Zeitschrift für Instrumentenkunde (Ztschr. f. Instr.).
- Eine Zusammenstellung der älteren Literatur findet man bei:
G. Kirsten, Allgemeine Encyclopädie der Physik, 1. Bd., Einleitung in die Physik, Leipzig 1869, p. 574-597.

B) Monographien und Journalliteratur.

- F. Auerbach, Waage und Wägung, Handbuch der Physik, herausg. von A. Winkelmann, 1. Band, Breslau 1891, p. 121.
- E. Brauer, Die Konstruktion der Waage nach wissenschaftlichen Grundsätzen und nach Massgabe ihres Spezialzwecks. Mit einem Atlas. Weimar 1880. (Enthält technische Details.)
- W. Dittmar, Über die Waage des Chemikers, Ztschr. f. Instr. 1 (1881), p. 313.
- W. Fölgerberger, Über den Einfluss der Schneide auf die Schwingungsdauer des Pendels und der Waage, Abhandlg. Normal-Eichungs-Komm. 4 (1903), p. 167.
- J. Ph. Herr, Über das Verhältnis des Bergkrystall-Kilogramms, welches das Ur-

- gewicht in Österreich bilden soll, zum Kilogramme der Kais. Archive zu Paris, Wien 1870.
- F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 9. Aufl., Leipzig und Berlin 1901 (Kapitel über Wägung).
- A. Th. Kupfer, Travaux de la commission pour fixer les mesures et les poids de l'empire de Russie, St. Petersburg 1841 (Kupfer).
- L. Löwenherz, Apparate für Messen und Wägen. Aus dem Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876, Braunschweig 1878, p. 207.
- Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, Berlin 1880. Die metrologischen Apparate B, p. 186.
- W. J. March, Pesées, Travaux 1-3 (1881, 1883, 1884).
- D. Mendeleeff, Recherches expérimentales sur les oscillations de la balance, Pétersbourg 1900.
- H. V. Regnault, A. Moris et J. E. W. Birt, Rapport sur les comparaisons qui ont été faites à Paris en 1859 et 1860 de plusieurs kilogrammes avec le kilogramme prototype des Archives Impériales, Berlin 1861.
- J. H. Poynting, The mean density of the earth, London 1894, Part II.
- F. Richarz und O. Krüger-Menzel, Waage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, Ztschr. f. Instr. 13 (1893), p. 10 (Richarz und Krüger-Menzel, Waage).
- Bestimmung der Gravitationskonstanten und der mittleren Dichtigkeit der Erde, Anhang zu Bd. I. Abhandlg. 1898, p. 1.
- G. Schwirkus, Über Wägungen, Wagen und Gewichte, Ztschr. f. Instr. 1 (1881), p. 81 und 2 (1882), p. 310.
- Über den Bau und Gebrauch wissenschaftlicher Wagen, Ztschr. f. Instr. 7 (1887), p. 41, 83, 412.
- H. Stadthagen, Über die Veränderlichkeit von Gewichtsstücken, Abhandlg. Normal-Eichungs-Komm. 4 (1903), p. 81.
- Über die Veränderlichkeit der Masse von Achat, ibidem, p. 109.
- F. J. Stankart, Over de Bewegingen eener Balans, Amsterdam, Verhandl. Kon. Nederl. Inst. (3) 1 (1849), p. 63.
- M. Thiesen, Zur Theorie der Waage und Wägung, Ztschr. f. Instr. 2 (1882), p. 358 und 3 (1883), p. 81.
- Études sur la balance, Travaux 5 (1886), Thiesen.
- B. Weinstein, Handbuch der physikalischen Massenbestimmungen, 2. Band, Berlin 1888, Abschnitt XV bis XIX (Weinstein).
- H. Weymann, Über den Zusammenhang von Schwingungsdauer und Empfindlichkeit einer Waage. Abhandlg. Normal-Eichungs-Komm. 1 (1903), p. 137.

III. Versuche zum mechanischen Nachweis der Erdrotation.

A) Bibliographisches und Historisches.

- Ph. Gilbert, Sur les expériences propres à manifester la rotation de la terre, J. de phys. 2 (1883).
- Les preuves mécaniques de la rotation de la terre, Bull. des sciences math. (2) 6 (1882), p. 189.
- C. Wolf, Bibliographie du pendule (vgl. oben unter I A).
- Die Fortschritte der Physik in den Jahren 1850 u. 1851, 6-7, Berlin 1855, und folgende Jahrgänge.

B) Monographien und Journalliteratur.

- J. F. Benzenberg*, Versuche über das Gesetz des Falls, über den Widerstand der Luft und über die Umdrehung der Erde u. s. w., Dortmund 1804 (*Benzenberg*).
- J. Ph. M. Binet*, Note sur le mouvement du pendule simple en ayant égard à l'influence de la rotation diurne de la terre, Paris C. R. 32 (1851), p. 157 u. 197.
- A. Bravais*, Sur les systèmes dans lesquels les vibrations dextrogyres et lévogyres ne s'effectuent pas de la même manière, Paris C. R. 32 (1851), p. 166.
— Sur l'influence, qu'exerce la rotation de la terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques, Paris C. R. 33 (1851), p. 195.
- Th. Clausen*, Über den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben. Ann. Phys. Chem. Ergzhd. 4 (1851), p. 135 (*Clausen*).
- W. Dumas*, Über die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde, J. f. Math. 50 (1855), p. 52 u. 126.
- A. Föppl*, Über einen Kreisversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, Münch. Ber. 34 (1901), p. 5.
- L. Foucault*, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule, Paris C. R. 32 (1851), p. 135.
— Explications sur l'expérience du Panthéon etc. Recueil des travaux scientifiques, Paris 1878, p. 385.
— Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre, fondée sur la fixité du plan de rotation, Paris C. R. 35 (1852), p. 421.
— Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par un axe fixe à la surface de la terre. — Nouveaux signes sensibles du mouvement diurne, ibidem, p. 424.
— Sur la tendance des rotations au parallélisme, ibidem, p. 602.
- Ph. Gilbert*, Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif, Brux. Ann. Soc. scientif. 6 (1881/82), p. 270—375 und 7 (1882/83), p. 11—110 (*Gilbert*, Mouvement relatif).
— Etude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, ibidem 2 (1877/78).
- J. B. Giglielmini*, De diurno terrae motu experimentis physico-mathematicis confirmato opusculum, Bononiae 1792.
- E. H. Hall*, Do falling bodies move southward? Phys. review 17 (1903), p. 179 u. 245.
- P. A. Hansen*, Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde, Neue Schriften der Naturforsch. Gesellsch. in Danzig 5 (1856) (*Hansen*).
- F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels. Heft III: Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen, Leipzig 1903 (*Klein-Sommerfeld*, Kreisels).
- O. Kragh*, Studier over Pendulbevægelsen, Diss. Kopenhagen 1902.
— Über die Kreiselbewegung an der Erdoberfläche, Ztschr. f. Math. und Phys. 49 (1903), p. 315.
- G. Lorentzen*, Theorie des Gaussischen Pendels, Astr. Nachr. 114 (1866), p. 241.
- E. Lottner*, Über die Einwirkung der Schwere entzogener, aber unter dem Einfluss der Erdbewegung rotierender Körper. — Theorie des Foucault'schen Gyroskops, J. f. Math. 64 (1857), p. 197.

- H. Kamerlingh-Onnes*, Nieuwe bewijzen voor de aswending der Aarde, Diss. Groningen 1879 (*Kamerlingh-Onnes*, Bewijzen).
— Over de betrekkelijke beweging, Nieuw Archief voor Wiskunde 5 (1879), p. 58 u. 135 und 6 (1880), p. 173 (*Kamerlingh-Onnes*, Betrek. beweg.).
- J. A. Quet*, Des mouvements relatifs en général, et spécialement des mouvements relatifs sur la terre, J. de math. 18 (1853), p. 213 (*Quet*).
- F. Rich.*, Fallversuche über die Umdrehung der Erde u. s. w., Freiberg 1832.
- E. J. Roth*, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Deutsche Ausgabe von *A. Schopp*, 2. Band: Die höhere Dynamik, Leipzig 1898, p. 27 (*Roth*).
- H. Suter*, Theorie des Gauss'schen Pendels, Berlin 1886.
- J. A. Serret*, Le pendule de *L. Foucault*, Paris C. R. 74 (1872), p. 269.
- M. de Sparre*, Sur le pendule de *Foucault*, Brux. Ann. Soc. scientif. 7 (1882/83), p. 111.
— Mémoire sur le pendule de *Foucault*, Paris, Mém. sav. étr. 31 (1891).

1. Vorbemerkung. Der folgende Artikel beschäftigt sich mit der Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen. Er macht keinen Anspruch auf Vollständigkeit, da die Rücksicht auf den verfügbaren Raum die Beschränkung auf wenige charakteristische Beispiele erforderte. Als solche sind gewählt: Das Pendel, die Waage und die Versuche zum mechanischen Nachweis der Erdrotation.

Das Hauptgewicht ist auf die Hervorhebung der Wechselbeziehung zwischen Theorie und Praxis gelegt: es sollte hervortreten, welcher Art einerseits die Fragestellungen sind, die die praktische Durchführung der Versuche an die Theorie stellt und in welcher Weise andererseits in der Praxis die theoretischen Entwicklungen zur Benutzung gelangen. Es zeigt sich dabei, dass nicht die explizite Lösung von theoretisch einfach zu konstruierenden Fällen das Wesentliche ist, sondern vielmehr die Angabe, mit welcher Genauigkeit nach einer bestimmten Rechenvorschrift das gesuchte Resultat ermittelt werden kann. Auch der andere Umstand verdient hervorgehoben zu werden, dass in der Praxis sehr viel darauf ankommt, in welchem Grössenbereich sich die Konstanten und Variablen der Aufgabe bewegen, der Art, dass zwei Probleme, die — theoretisch völlig analog — sich nur durch die Grössenordnung der Konstanten und Variablen unterscheiden, doch praktisch eine verschiedene Durchführung erfordern (wie z. B. die Schwingungen eines Pendels und einer Waage).

I. Das Pendel.

2. Relativo und absolute Messungen. Die fundamentalen Definitionen für das Pendel und die Beziehungen zwischen ihnen finden

sich in allen Lehrbüchern der Mechanik, worauf hier verwiesen wird. An dieser Stelle möge nur zur Ergänzung folgendes hinzugefügt werden. Das Pendel soll hier in seiner Eigenschaft als Messinstrument für die Schwerebeschleunigung g betrachtet werden. Man unterscheidet zwei Arten von Schweremessungen, die *absoluten* und die *relativen*. Die ersten haben den Zweck, den absoluten Wert der Schwerkraft an einem Orte festzustellen, während bei den letzteren nur das Verhältnis der Schwerkraften an zwei Orten bestimmt wird¹⁾.

Aus diesem Grunde wird für relative Schwerkraftsmessungen nicht Fehlerlosigkeit, sondern nur Konstanz des Pendelapparates vorausgesetzt; man benutzt zu diesen Messungen deshalb die sogenannten „*invariablen Pendel*“, die so konstruiert sein sollen, dass sie auch bei Transport möglichst unverändert bleiben²⁾.

Zu absoluten Schwerkraftsmessungen hat man das *Fadenpendel*³⁾ und das *Reversionspendel*⁴⁾ benutzt.

Im folgenden werden uns gerade die einzelnen Fehlerquellen bei Pendelbeobachtungen hauptsächlich beschäftigen; deshalb wird sich ein Teil der folgenden Nummern nur auf absolute Schwerkraftsmessungen beziehen.

1) Die Idee der relativen Schwerkraftsmessungen stammt schon aus dem 18. Jahrhundert.

2) Über invariable pendulums (Survey of India 5 (1879), Appendix Nr. 2); ferner *Defforges*, Observations, p. 135. Gegenwärtig haben die nach dem Vorgange *R. v. Sterneck's* konstruierten Halbskundenpendel (Militär-geogr. Inst. Wien 2 (1882), p. 86) grosse Verbreitung erlangt. Neuerdings sind auch Pendelapparate konstruiert, bei denen gleichzeitig mehrere Pendel auf demselben Stativ aufgehängt werden können. Vgl. die Beschreibung solcher Apparate bei *M. Haid*, Ztschr. f. Instr. 16 (1896), p. 193 und bei *L. Haasemann*, Ztschr. f. Instr. 22 (1902), p. 97. Auch mit Viertelskundenpendeln sind Beobachtungen ausgeführt, vgl. *G. R. Putnam*, Wash. Phil. Soc. Bull. 13 (1895-99), p. 57. Eine von *J. Wilsing* (Ztschr. f. Instr. 17 (1897), p. 109) angegebene besondere Art von Viertelskundenpendeln aus Glas, die gegen Temperatureinflüsse wenig empfindlich sein sollten, scheidet nach den vom Geodätischen Institut in Potsdam gemachten Erfahrungen nicht genügend invariabel zu sein. Bezüglich der Resultate der relativen Schwerkraftsmessungen verweisen wir auf *F. R. Helmert*, Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten, Verhandlg. Konf. (Paris) 1900 Bd 2, p. 139. Näheres darüber in VI 1. Teil.

3) Das Fadenpendel ist hauptsächlich von *J. C. Borda* und *F. W. Bessel* vervollkommen worden. Beschreibung von Fadenpendelapparaten bei *Borda*, *Bessel* Sekundenpendel, *Pisani*.

4) Das Reversionspendel ist dreimal erfunden worden, von *R. de Prony* (die betreffende Abhandlung ist aber erst 1889 in Collection 4, p. 65 publiziert), von *J. Bohnenberger* (Astronomie, Tübingen 1811) und *H. Kater* (Lond. Phil. Trans. 108 (1818), p. 33). Abbildungen von Reversionspendeln siehe auf p. 32.

Die Pendel sind meistens aus Messing⁵⁾ hergestellt; sie werden, besonders bei den relativen Messungen, in einem transportablen Stativ⁶⁾ aufgehängt. Das Stativ selbst ist dann mit einem Pfeiler oder einer Unterlagsplatte verbunden, die auf dem Fussboden des Beobachtungsraumes, möglichst vor Erschütterungen geschützt, ruhen. Es sind auch Stativ konstruiert, die direkt in die Zimmerwand eingelassen werden (Wandstativ).⁷⁾

A) Die Schwingungsdauer des Pendels.

3. Die Fundamentalformel für die Schwingungsdauer des Pendels. Für ein physisches Pendel, das ebene⁸⁾ ungedämpfte Schwingungen um eine feste horizontale⁹⁾ Axe ausführt, gilt die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad l = \frac{J}{Mh}$$

Dabei bedeutet:

φ die Elongation des Pendels,

l die mathematische Länge des Pendels,

J das Trägheitsmoment des Pendels für die Drehaxe,

M die Masse des Pendels,

h den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe.

Finden die Schwingungen mit unendlich kleiner Amplitude statt, so kann man in der genannten Differentialgleichung $\sin \varphi$ durch φ ersetzen, und es gilt dann für die Schwingungsdauer T des Pendels die Beziehung:

$$(2) \quad T^2 = \pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

5) Man vermeidet Stahl wegen seiner magnetischen Eigenschaften. Dass auf die gebräuchlichen Messingpendel das erdmagnetische Feld keinen merklichen Einfluss ausübt, folgt aus einer Überschlagsrechnung und ist auch durch Versuche von *L. Haasemann* im Geodätischen Institut zu Potsdam bewiesen (vgl. auch *Helmert*, Beiträge, p. 56).

6) Über neuere Konstruktionen von Pendelstativen für relative Messungen vgl. *R. v. Sterneck*, Militär-geogr. Inst. Wien 2 (1882), p. 87; *M. Haid*, Ztschr. f. Instr. 16 (1896), p. 193 und *L. Haasemann*, ibidem 22 (1902), p. 97.

7) *R. v. Sterneck*, Militär-geogr. Inst. Wien 11 (1891), p. 217 und 17 (1897), p. 101; *K. R. Koch*, Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg 1901, p. 358.

8) Räumliche Pendelschwingungen sind bislang zur Bestimmung der Schwerkraft nicht benutzt; im folgenden sind daher unter Schwingungen ohne weiteren Zusatz immer ebene Schwingungen verstanden.

9) Man prüft die Horizontalität der Axe durch ein Niveau, möglichst bei hängendem Pendel.

Zur Bestimmung von $g^{10)}$ ist daher T , die Schwingungsdauer, mit l , die Länge des gleichschwingenden mathematischen Pendels, zu ermitteln.

Derjenige Punkt, der auf dem Lote vom Schwerpunkt auf die Drehaxe im Abstände l von der Drehaxe nach unten liegt, heisst der *Schwingungsmittelpunkt* des Pendels.

4. Die Bestimmung der Schwingungsdauer. Die Bestimmung von l durch eine Längenmessung ist bei einem einfachen Pendel, das nur eine Drehaxe besitzt, nicht ausführbar, da weder die Drehungsaxe noch der Schwingungsmittelpunkt präzise genug fixiert werden können; über die Hilfsmittel zur Überwindung dieser Schwierigkeit vergleiche man den Abschnitt C.

Die *Schwingungsdauer* eines Pendels wird durch Vergleichung seiner Schwingungen mit denen einer astronomischen Pendeluhr (oder eines Chronometers), deren Gang durch astronomische Zeitbestimmungen ermittelt wird, bestimmt. Die Vergleichung erfolgt entweder durch elektrisches „Registrieren“ von Durchgängen des Pendels durch die Ruhelage oder durch Beobachtung von „Koinzidenzen“.

Das Registrieren kann entweder vom Beobachter selbst ausgeführt werden¹¹⁾ oder automatisch vom Pendel¹²⁾. Die von J. J. Mairan¹³⁾ erfundene und von J. C. Borda ausgebildete Methode der Koinzidenzen erfordert, dass das Pendel und die Vergleichsuhr annähernd gleiche Schwingungszeit haben oder dass sich wenigstens das Verhältnis ihrer Schwingungszeiten annähernd in kleinen ganzen Zahlen $m:n$ ausdrücken lässt. Es werden nach dieser Methode die Zeitmomente beobachtet, in denen beide Pendel gleichzeitig durch die Ruhelage gehen (Koinzidenz), oder allgemeiner gesagt, in denen beide Pendel sich in einer bestimmten Lage befinden. Die zwischen zwei aufeinander folgenden Koinzidenzen verlossene Zeit heisst das Koinzi-

10) An Stelle von g wird bei absoluten Schwerekräftsmessungen vielfach die Länge des Sekundenpendels (mittlere Zeit) für den betreffenden Ort angegeben.

11) v. Off, p. 30-190; Peirce, Methods, p. 6; Lorenzoni, Relazione, p. 182. Über die Änderung der periodischen Gleichung bei verschiedener Geschwindigkeit des Pendels vgl. v. Off, p. 92-97 (252-257); über Vermeidung dieser Änderung durch Anwendung verschiedener Vergrößerung siehe Peirce, Methods, p. 7.

12) C. Bruhns und Th. Albrecht, Astron.-geodät. Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreich Sachsen. III. Abteilung: Die astronomischen Arbeiten 1883, p. 314; bei Pisati, p. 103 Vergleich beider Methoden.

13) Historisches über die Erfindung der Koinzidenzmethode bei C. Wolf, Introduction, p. X.

denzenintervall c . Aus dem angenäherten Verhältnis $m:n$ und dem Koinzidenzenintervall c ergibt sich die Schwingungszeit des Pendels:

$$(3) \quad T = \frac{m}{n} \left(1 \pm \frac{m}{cn + m} \right),$$

wenn man als Einheit die Schwingungszeit der Uhr rechnet. Es gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem das genaue Verhältnis der Schwingungszeiten beider Pendel grösser oder kleiner als $m:n$ ist, was vor Anwendung der Methode ermittelt werden muss¹⁴⁾. Die Koinzidenz findet im allgemeinen nicht mit mathematischer Strenge statt; es genügt dann lineare Interpolation¹⁵⁾.

Zur Beobachtung der Koinzidenzen dient entweder ein direktes optisches Verfahren¹⁶⁾ oder es werden mittelst des elektrischen Stroines die Uhrschnitte auf einen „Koinzidenzapparat“ übertragen, mit dessen Hilfe die Koinzidenzen beobachtet werden¹⁷⁾.

Die letzte Methode hat den Vorteil, dass sich die Uhr an einem beliebigen Orte befinden kann, den Nachteil, dass die Verzögerung, die durch Einschaltung des Koinzidenzapparates entsteht, als konstant angesehen werden muss, was übrigens in praxi ausreichend der Fall ist. Um genügende Genauigkeit zu erzielen, ist stets eine grössere Anzahl von Registrierungen oder Koinzidenzbeobachtungen erforderlich. Diese sind entweder streng nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen, wozu dann auch die Kenntnis des Gesetzes der Amplitudenabnahme erforderlich ist, oder aber, was bei kleinen Amplituden stets gestattet ist, mit Hilfe einer angenäherten Ausgleichung zu behandeln¹⁸⁾.

Die geschilderte Schwingungsdauerbestimmung eines Pendels bedient sich der Vermittelung einer *astronomischen Uhr*. Daraus resultiert eine Fehlerquelle, insofern die Bestimmung des *Uhrgangs* Fehlern unterworfen ist. Diese Fehlerquelle kann bei Benutzung von mittelmässigen Pendeluhren (oder Chronometern) sehr beträchtlich werden, da die astronomischen Zeitbestimmungen nur den mittleren

14) Dies kann entweder dadurch geschehen, dass man einige Pendelschwingungen registriert, oder besser, indem man sich direkt des Koinzidenzapparates bedient; vgl. E. Barrass in „Schwerkraft von Kolberg bis Schneekoppe“, p. 225, Anmerkung.

15) Vgl. Helmert, Beiträge, p. 43.

16) Borda, p. 342; Bessel, Sekundenpendel, p. 11; H. C. Vogel, Repertorium f. Experimentalphysik (Carl's Rep.) 17 (1881), p. 337; Defforges, Observations, p. 31 und Perin, Komm. (Nizza) 1887, Annex 67, p. 19.

17) L. Gruber, Wien. Ber. 70 (1871), p. 565; R. v. Sterneck, Militär.-geograph. Inst. Wien 3 (1883), p. 69; C. F. W. Peters, Astr. Nachr. 110 (1884), p. 231.

18) Vgl. unter Nr. 6 und Nr. 8.

Uhrgang für einen oder mehrere Tage liefern, während die Schwingungsdauerbeobachtungen die Kenntnis des mittleren Uhrganges für die Dauer der Beobachtung erfordern.

Man kann dieser Fehlerquelle dadurch abhelfen, dass man die ganze Zeit zwischen zwei Zeitbestimmungen durch Beobachtungen ausfüllt¹⁹⁾. Bei relativen Schwermessungen hat man auch zur Elimination des Uhrganges durch dieselbe Uhr gleichzeitig zwei Koinzidenzapparate an den beiden Orten, für welche das Verhältnis der Schwerkraft bestimmt werden soll, treiben lassen²⁰⁾. Über die Ausführung von Koinzidenzbeobachtungen, wenn das Verhältnis der Schwingungszeiten von Uhr und Pendel sich nicht mit genügender Annäherung durch kleine Zahlen ausdrücken lässt, vgl. *Bessel*, Sekundenpendel, p. 13.

Die Schwingungsdauer eines Pendels lässt sich mit einer Genauigkeit von einigen Zehnmillionteln ihres Betrages ermitteln.

B) Die störenden Einflüsse.

Es sei eine kurze Bemerkung von prinzipieller Bedeutung vorgebracht. Die Voraussetzungen, die über die einzelnen Versuchsbedingungen gemacht werden, sind in Wirklichkeit niemals streng erfüllt. Wenn z. B. von einer Pendelschneide angenommen wird, dass sie kreisförmigen oder elliptischen Querschnitt hat oder noch allgemeiner, dass sich der Krümmungsradius des Querschnittes in eine gewisse Reihe entwickeln lasse, so sind alle diese Annahmen, auch die letzten nur approximativ erfüllt. Es ist darum für die Praxis auch von keiner grossen Bedeutung, dass die Folgerungen aus den Hypothesen in aller Strenge entwickelt werden; es braucht vielmehr immer nur eine gewisse Approximation an das strenge Resultat erreicht zu werden, deren Grad durch die Approximation der Hypothesen an die Wirklichkeit und ausserdem durch die Beobachtungsgenauigkeit bedingt ist. Sehr wichtig für alle Anwendungen ist es dagegen, den Grad der Approximation in jedem einzelnen Falle festzulegen, eine Forderung, die häufig nicht beachtet wird²¹⁾.

19) Man lässt dann am besten die Pendel im luftverdünnten Raume schwingen. Vgl. *Mendenhall*, Determinations of gravity, p. 505 und andere.

20) *Ibidem*, p. 528; *P. G. Rosén*, Stockholm Handlingar (Bihang) 24 (1899), p. 1; *K. R. Koch*, Relative Schwermessungen, Jahreshefte d. Vereins f. vaterl. Naturkunde in Württemberg 1901, p. 356.

21) Bezüglich näherer Ausführungen vgl. *F. Klein*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, Leipzig 1902.

5. Der Einfluss der endlichen Amplitude. Ist T die Schwingungsdauer des Pendels bei unendlich kleiner Amplitude, so wird für ein nach Differentialgleichung (1) schwingendes Pendel die Schwingungsdauer bei der endlichen, aber immer noch kleinen Amplitude α mit genügender Annäherung durch den Ausdruck²²⁾:

$$(4) \quad T \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

dargestellt; das Glied $-\frac{T\alpha^2}{16}$ heisst die „Reduktion auf unendlich kleine Amplitude“.

Da eine Schwingungsdauerbeobachtung immer längere Zeit erfordert, in deren Verlauf die Amplitude abnimmt, so ist zur genauen Ermittlung der Reduktion auf unendlich kleine Amplitude, die in genügender Weise durch das Integral:

$$(5) \quad -\frac{T}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\alpha^2}{16} dt$$

dargestellt wird, wenn die Beobachtung von t_0 bis t_1 gedauert hat, entweder die Kenntnis des Gesetzes der Amplitudenabnahme²³⁾ erforderlich, oder es muss die Amplitude häufig genug beobachtet werden, um das Integral durch mechanische Quadratur auszuwerten. Für die Berechnung der Reduktion auf unendlich kleine Amplitude haben die einzelnen Beobachter verschiedene, zum Teil unnötig komplizierte Näherungsverfahren angewandt²⁴⁾; bei der jetzt gebräuchlichen Amplitudengrösse (Anfangsamplitude kleiner als 30°) genügt meistens die Rechnung mit dem geometrischen oder sogar arithmetischen Mittel aus Anfangs- und Endamplitude. *J. C. Borda* und *J. D. Cassini* haben als Korrektion:

22) Historisches bei *C. Wolf*, Introduction, p. XII. Die vollständige Reihe für die Schwingungsdauer findet man in jedem Lehrbuch, das eine Anwendung der elliptischen Funktionen auf das Pendel gibt; vgl. auch *Th. Wittstein*, Astr. Nachr. 68 (1862) p. 135, wo nach *C. F. Gauss* als Formel für die Schwingungsdauer bei der Amplitude α angegeben wird:

$$T \frac{1}{\text{Arithm.-geometr. Mittel von } 1 \text{ und } \cos \frac{\alpha}{2}}$$

Der Fehler der im Text angegebenen Formel ist kleiner als $5 \cdot 10^{-8} T$, wenn die Amplitude kleiner als rund 3° ist.

23) Vgl. hierzu Nr. 8.

24) *Borda*, p. 353; *Bessel*, Sekundenpendel, p. 28; *Lorenzoni*, Relazione, p. 188; *v. Orff*, p. 74 (234); *Th. v. Oppolzer*, Wien. Ber. 86 (1882), p. 713; *Helmer*, Beiträge, p. 42.

$$(6) \quad -T \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{32 \cdot \log \alpha - \log \beta}$$

angebracht, wo α die Anfangs- und β die Endamplitude bezeichnet. Diese Formel ist im wesentlichen mit dem oben angegebenen Integral identisch, wenn man eine Abnahme der Amplitude in geometrischer Progression annimmt²⁵⁾.

6. Der Einfluss des umgebenden Mediums²⁶⁾. Das umgebende Medium übt einen doppelten Einfluss auf die Pendelschwingungen aus, indem es erstens die Schwingungsdauer vergrößert und zweitens die Amplitude der Schwingungen verringert.

a) Einfluss auf die Schwingungsdauer.

Der erste, der einen Einfluss auf die Schwingungsdauer berücksichtigte, war P. Bouguer²⁷⁾. Er brachte die „hydraulische“ (aerostatische) Korrektur an, die vom Auftrieb der Luft herrührt und dadurch berücksichtigt wird, dass man das statische Moment gleich $Mh - M_1h_1$ setzt, wo M_1 die Masse der verdrängten Luft und h_1 den Abstand des Volumenschwerpunkts von der Drehaxe bedeutet. Das Unzulängliche dieser Korrektur erkannte zuerst L. G. Du Buat²⁸⁾; seine theoretischen Betrachtungen und seine Versuche blieben unbeachtet²⁹⁾, und erst, als F. W. Bessel³⁰⁾ bei seinen Untersuchungen über das Fadenpendel selbständig dieselbe Entdeckung machte, wurde es allgemein bekannt, dass nicht nur das statische Moment, sondern auch das Trägheitsmoment des Pendels infolge der mitschwingenden Luft eine Veränderung erleidet. Ausführliche experimentelle Untersuchungen wurden ausser von F. W. Bessel später noch von E. Sabine³¹⁾ und E. Baily³²⁾ angestellt. Ist Mr^2 das Trägheitsmoment des Pendels (r Trägheitsradius), so ist nach L. G. Du Buat und F. W. Bessel zur Berücksichtigung des Lufteinflusses an Stelle von M der Ausdruck $M + kM_1$ zu setzen, wo k eine dem Pendel eigentümliche Konstante

25) Collection 4, p. 30. Über die Reduktionsformeln bei anderen Gesetzen der Amplitudenabnahme vgl. Th. v. Oppolzer, Wien. Ber. 86 (1882), p. 726 und Ch. Dufourges, Perm. Komm. (Freiburg) 1890, p. 179 und Observations, p. 65.

26) Vgl. IV 15, Nr. 15 (A. E. H. Love) und IV 16, Nr. 65 (A. E. H. Love).

27) Figure de la terre, Paris 1752.

28) Principes d'hydraulique, un grand nombre d'expériences faites par ordre du Gouvernement, 1786.

29) C. Wolf, Bibl., p. 64.

30) Sekundenpendel, p. 32.

31) Lond. Phil. Trans. 119 (1829), p. 207 = Collection 5, p. 137.

32) Lond. Phil. Trans. 122 (1832), p. 309 = Collection 5, p. 185.

ist. Die erste theoretische Ermittlung von k versuchte S. D. Poisson³³⁾, der unter Vernachlässigung der Reibung für eine Kugel den Wert $k = \frac{1}{2}$ ermittelte. G. Green³⁴⁾ gab die Lösung für ein Ellipsoid. Da die Theorie mit den Versuchen nicht stimmte, musste die Reibung berücksichtigt werden. Dies führte G. G. Stokes³⁵⁾ durch, indem er das Problem unter Berücksichtigung der Reibung, aber unter Beschränkung auf unendlich kleine Schwingungen (Vernachlässigung des Quadrates der Geschwindigkeit) und unter der Annahme, die Luft sei inkompressibel, für Kugel und Zylinder löste. Eine mathematisch vollständigere Lösung gab O. E. Meyer³⁶⁾, indem er vor allen Dingen zeigte, dass bei dem vorliegenden Problem wirklich eine bestimmte Schwingungsdauer existiert; er führte später auch den Nachweis, dass die Kompressibilität der Luft vernachlässigt werden darf³⁷⁾. Man vergleiche auch die Entwicklungen von J. Boussinesq³⁸⁾. Das Resultat für eine Kugel, die im unbegrenzten Medium Pendelschwingungen ausführt, ist folgendes:

Bedeutet a den Kugelradius, δ die Dichte des umgebenden Mediums, η seine absolute Zähigkeit³⁹⁾ und l die ungestörte mathematische Pendellänge, so gilt:

$$(7) \quad T^2 = \pi^2 \cdot \frac{l}{g} \cdot \frac{M + kM_1}{M - M_1}$$

$$k = \frac{1}{2} + \frac{9}{4ra} \cdot \left[\frac{\pi \delta}{24T} \right]$$

Schwingt die Kugel innerhalb einer konzentrischen Kugel vom Radius b , so erleidet k die Änderung Δk :

$$(8) \quad \Delta k = \frac{3a^3}{2b^3 - a^3}$$

Für einen unendlich langen Zylinder vom Radius a , der um eine Gerade senkrecht zu seiner Axe im unbegrenzten Medium schwingt, wird k in Gestalt einer unendlichen Reihe erhalten:

33) Com. des temps pour 1834, p. 18 und Paris Mém. de l'Acad. 11 (1832), p. 521.

34) Édimb. Phil. Soc. Trans. 13 (1836), p. 51.

35) Pendulum.

36) J. f. Math. 73 (1871), p. 31.

37) J. f. Math. 75 (1872), p. 336.

38) Paris C. R. 100 (1885), p. 935 u. 974.

39) Man kann, wie aus den obigen Formeln und den analogen unter b) hervorgeht, durch Beobachtung der Pendelschwingungen die Zähigkeit η des umgebenden Mediums ermitteln. Günstiger ist es allerdings, die Drehungen einer Pendelkugel oder noch besser einer Scheibe um eine vertikale Axe zu beobachten; man vergleiche hierzu O. E. Meyer, J. f. Math. 59 (1861), p. 229 u. a.

$$(9) \quad k = 1 + \frac{1}{m} + \dots$$

$$m = \frac{a}{2} \int \frac{\pi \delta}{\eta T}$$

Die Anwendung der Stokes'schen Theorie auf das Reversionspendel führten *C. S. Peirce*⁴⁰⁾ und *Ch. Defforges*⁴¹⁾ durch, indem sie für die Reduktion der Schwingungszeit auf das Vakuum den Ansatz machten:

$$(10) \quad A\delta + B\sqrt{\delta},$$

wo δ die Dichte der Luft bezeichnet und A und B Konstante bedeuten, die von *Ch. Defforges* experimentell, von *C. S. Peirce* experimentell und rechnerisch bestimmt sind⁴²⁾. Während die beiden genannten den Einfluss der umgebenden Luft durch Beobachtungen bei verschiedener Luftdichte ermittelten⁴³⁾, benutzte *Bessel* bei seinen Untersuchungen mit dem Fadenpendel zwei gleich grosse Pendelkugeln von möglichst verschiedenem spezifischen Gewicht.

b) Der Einfluss auf die Amplitude.

Der Einfluss des umgebenden Mediums auf die Amplitude⁴⁴⁾ wird, so lange es sich um kleine Schwingungen handelt, in genügender Weise berücksichtigt, wenn man in Gleichung (1) ein Glied $2\alpha \frac{d\varphi}{dt}$ hinzufügt, so dass die Differentialgleichung für die gedämpften Pendelschwingungen lautet:

$$(11) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

40) *Methods*, p. 61.

41) *Observations*, p. 56. Man vergleiche ferner noch *Survey of India* 5, p. [72].

42) Von *C. S. Peirce* ist auch die Abhängigkeit der Zähigkeit der Luft von der absoluten Temperatur in Rechnung gezogen, indem er annahm, dass die absolute Temperatur mit der 3/4 Potenz als Faktor in dieselbe eingeht (*Methods*, p. 66).

43) In gleicher Weise wird auch bei den invariablen Pendeln verfahren, bei denen es meistens genügt, die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Luftdruck als linear anzusehen. (Vgl. z. B. „Schwerkraft von Kolberg bis Chneekoppe“, p. 98 und p. 188.) Bei Pendelbeobachtungen im luftverdünnten Raume ist zu beachten, dass die Thermometerkorrektur vom Luftdruck abhängt. Vgl. *E. Sabine*, *Lond. Phil. Trans.* 119 (1829), p. 207 = *Collection* 5, p. 144; *Survey of India* 5, p. [45]; *Travaux* 1 (1881), p. D 6 und 5 (1886), p. 27 der *Études thermométriques*; *Wissenschaftl. Abhandlg. der Physik.-Techn. Reichsanstalt* 1 (1894), p. 71.

44) Schon von *J. Newton* untersucht.

Der Widerstand der Luft, zu dem noch die an der Aufhängung wirkenden Reibungskräfte hinzutreten, kann also für kleine Amplituden der Geschwindigkeit des Pendels proportional angenommen werden. Aus dieser Annahme resultiert eine Abnahme der Amplitude in geometrischer Progression⁴⁵⁾:

$$(12) \quad a = a_0 e^{-\lambda t},$$

wenn man mit a die Amplitude zur Zeit t , mit a_0 die Amplitude zur Zeit $t = 0$ bezeichnet.

Der Dämpfungskoeffizient λ , statt dessen man auch häufig das „logarithmische Dekrement“ ($10 \log_e T\lambda$) benutzt, hängt von der Dichte der umgebenden Luft ab. Es gilt unter Benutzung der früheren Bezeichnungen für die Pendelschwingungen einer Kugel:

$$(13) \quad \lambda T = \frac{\pi k_1 M_1}{2M + (k_1 + 1)M_1} \cdot k_1^{-1} \cdot \frac{9}{1 + \frac{1}{\rho a} - \frac{\lambda T}{2\pi}}$$

Für einen Cylinder, der unter den oben angegebenen Bedingungen schwingt, hat k_1 wieder die Gestalt einer unendlichen Reihe:

$$(14) \quad k_1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \dots$$

In diesen Ausdrücken kommt selbstverständlich nur der von dem umgebenden Medium ausgeübte Widerstand zur Geltung.

Die Dämpfung als solche hat, mag sie nun der ersten oder zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional sein, wenn sie sich in den gewöhnlichen Grenzen hält, keinen merklichen Einfluss auf die Schwingungsdauer; gilt die Differentialgleichung (11), so ist die Korrektur wegen Dämpfung $\frac{\lambda^2 T^2}{2\pi^2}$. Dass die Pendelschwingungen auch bei beliebigem Widerstandsgesetz für unendlich kleine Amplitude isochron sind, hat *J. Decombe*⁴⁶⁾ bewiesen.

7. Das Mitschwingen des Stativs, des Pfeilers und Untergrundes. *Chr. Huygens*⁴⁷⁾ und *J. Ellicott*⁴⁸⁾ haben beobachtet, dass zwei Uhren an derselben Wand den gleichen Gang annehmen. Später hat *F. Savart*⁴⁹⁾ darüber eingehendere Versuche, allerdings nur qualitativer

45) Zuerst von *P. Bouguer* ausgesprochen. Man sehe auch *C. F. Gauss*, *Werke*, 6, p. 374.

46) *Paris C. R.* 133 (1904), p. 147.

47) *Journ. des savants* 1665, p. 130.

48) *Lond. Phil. Trans.* 41 (1739), p. 126 u. 128.

49) *L'Institut* 7 (1839), p. 463.

Encyklop. d. math. Wissensch. IV 1, II.

Art, angestellt; an diese Versuche knüpfen die theoretischen Entwicklungen von *S. D. Poisson*⁵⁰⁾ und *H. Résal*⁵¹⁾ an.

Jedenfalls war den älteren Beobachtern⁵²⁾ die Tatsache, dass durch den wechselnden Horizontaldruck⁵³⁾, den das Pendel bei seiner Bewegung ausübt, die Aufstellung in Mitschwingen versetzt wird, wohl bekannt. Sie geriet indessen um die Mitte des vorigen Jahrhunderts völlig in Vergessenheit und wurde erst, als die Beobachtungen mit den *Repsold*'schen Reversionspendeln, denen ein Stativ von sehr geringer Stabilität beigegeben war, stark abweichende Resultate ergaben, auf einen Hinweis von General *J. J. Baycr* 1875 von *C. S. Peirce*⁵⁴⁾ wieder entdeckt. Bei der theoretischen Behandlung macht man im wesentlichen die Annahme, dass die Ausladung des Stativs einfach dem Horizontaldruck des Pendels proportional sei⁵⁵⁾ und vernachlässigt die Eigenschwingungen der Aufstellung.⁵⁶⁾ Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Ausladung σ des Stativs und für die gestörte mathematische Pendellänge l' :

$$(15) \quad \sigma = \frac{Mgh}{l} \varphi, \quad l' = l \left(1 + \frac{Mgh}{l^2} \right)^{57)},$$

wo h den Schwerpunktsabstand von der Drehaxe, l die ungestörte mathematische Pendellänge, φ die Elongation des Pendels um $1/2$ die Verschiebung bedeutet, die das Pendellager unter dem Horizontaldruck l erleidet. Für die mit einem Reversionspendel beobachtete gestörte Länge l' des Sekundenpendels ist:

50) *Conn. des temps pour 1833*, p. 3.

51) *Paris C. R.* 76 (1872), p. 75 und *Ann. ec. norm.* 2 (1873), p. 445.

52) Sie wählten deshalb, obwohl sie meistens leichte Pendel hatten, sehr feste Aufstellungen und prüften die Festigkeit, allerdings nur qualitativ, noch durch das vom Uhrmacher *W. Hardy* (*Ann. d. Phys.* 75 (1823), p. 589) erfundene „noddy“, ein aufwärts gebogenes Federpendel, ähnlich dem zur Taktangabe bei Musikstücken gebrauchten „Mälzels Metronom“; der Gebrauch des „noddy“ zu quantitativen Messungen (*C. S. Peirce*, *U. S. Survey* 1881 App. 15 und 1885 App. 16) scheint keinen Anklang gefunden zu haben.

53) Die Änderung des Vertikaldrucks während einer Schwingung (von der Ordnung des Amplitudenquadrates) kann vernachlässigt werden; vgl. *C. S. Peirce*, *U. S. Survey* 1881 App. 11.

54) *U. S. Survey* 1881 App. 14.

55) Über unelastisches Mitschwingen vgl. *Helmert*, *Beiträge*, p. 72.

56) Vgl. *Helmert*, *Beiträge*, p. 70; ferner *C. S. Peirce*, *Boston, Amer. Acad. Proc.* 13 (1878), p. 396.

57) Zuerst von *C. S. Peirce* entwickelt in *Verhandlgn. Konf. (Stuttgart) 1877*, p. 142. Über die Berücksichtigung des Anfangszustandes und über höhere Glieder vgl. neben *Peirce* l. c. auch *Helmert*, *Beiträge*, p. 71.

$$(16) \quad l' = l \left(1 - \frac{Mg}{lA} \right),$$

wenn mit A der Schneidenabstand bezeichnet wird.

Experimentelle Bestimmung der Korrektur wegen Mitschwingens.

Die Konstante ϵ , von der die Korrektur wegen Mitschwingens abhängt, muss experimentell bestimmt werden. Dazu dient

a) die statische Methode, bei der die Ausweichung, die das Stativ bei Ausübung eines bekannten Druckes oder Zuges erleidet, beobachtet wird. Die Beobachtung kann auf verschiedene Weise geschehen, direkt mikroskopisch, mit Fühlhebel, vermittelt Spiegel und Skala, oder unter Benutzung von optischen Interferenzen⁵⁸⁾.

b) Die dynamischen Methoden⁵⁹⁾.

a) Mikroskopische Beobachtung der Stativbewegung, wenn das Pendel schwingt⁶⁰⁾ (entweder direkt oder mit Fühlhebel oder mit Benutzung von optischen Interferenzen).

β) Das sogenannte „Wipperfahren“, bei dem unter Zuhilfenahme eines Dynamometers (Federwage) eine Anzahl Druckstöße (oder Zug- und Druckstöße) im Takt der Pendelschwingungen gegen die Pendelaufstellung ausgeführt werden⁶¹⁾.

Wird n -mal mit W Kilogramm in Schneidenhöhe gewippt und erhält das anfangs ruhig hängende Pendel dabei den Ausschlag ϵ , so ist:

$$(17) \quad \epsilon = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4n-1}{4lc} \cdot Wg.$$

58) *E. Plantamour*, *Verhandlgn. Konf. (Stuttgart) 1877*, Anhang; *C. S. Peirce*, *Verhandlgn. Konf. (Stuttgart) 1877* App. 1^b; *Ch. Defforges*, *J. de phys.* (2) 7 (1888), p. 858; *H. Nagaoka*, *J. of the college of science, imperial university, Tokyo*, Japan 16 (1902), Article 11, p. 20.

59) Über den Unterschied der auf statischem und dynamischem Wege ermittelten Werte für ϵ (die letzten sind die kleineren; vgl. *E. Plantamour* l. c., p. 9, 4/1. 49; *C. S. Peirce*, *U. S. Survey* (1881) App. 14, p. 69; *Defforges*, *Observation*, p. 19. Letzterer zieht zur Erklärung des Unterschiedes das Gleiten der Schneiden heran und folgert aus seinen Beobachtungen (*J. de phys.* (2) 7 (1888), p. 861. dass der statisch ermittelte Koeffizient zu benutzen sei. Die Ursache dürfte wahrscheinlich in der elastischen Nachwirkung liegen, die bei den statischen Versuchen voll zur Geltung kommt; vgl. *E. Plantamour* tritt z. B. die volle Ausweichung des Stativs erst nach circa 60 sec. ein.

60) Vgl. neben den Litteraturangaben in Fußnote 58 noch *Th. v. Oppolzer*, *Verhandlgn. Konf. (Stuttgart) 1877*, Annex 1^a, p. 191; *Perm. Komm. (Haag) 1882*, p. 89.

61) *R. Schumann*, *Astr. Nachr.* 140 (1896), p. 257; *E. Borrass* in *Veröffentl. Preuss. Geod. Inst. Neue Folge* Nr. 9, Berlin 1902. Zweiter Teil, p. 95. Über den Einfluss von Takt und Rhythmus beim Wippen auf das Resultat vgl. *Helmert*, *Beiträge* III, § 8.

γ) Verwendung zweier Pendel von annähernd gleicher Schwingungsdauer, die gleichzeitig auf demselben Stativ schwingen.

Über die letzte Methode, die wohl die genauesten Resultate liefert, sei noch folgendes erwähnt. Die Differentialgleichungen, nach denen die gleichzeitige Bewegung zweier Pendel auf demselben Stativ erfolgt, bilden ein System von zwei simultanen linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung⁶²⁾:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2\alpha_1 \frac{dq_1}{dt} + \frac{g}{l_1} q_1 = -\frac{2\gamma_1}{T_1} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2\alpha_2 \frac{dq_2}{dt} + \frac{g}{l_2} q_2 = -\frac{2\gamma_2}{T_2} \frac{dq_1}{dt} \end{cases}$$

Hier sind die Indices 1 und 2 zur Unterscheidung der beiden Pendel gewählt; γ_1 und γ_2 bedeuten die Vergrößerungen, welche die Schwingungsdauern der beiden Pendel durch das Mitschwingen der Unterlage erfahren. Voraussetzung für die Gültigkeit der Gleichungen (18) ist, dass erstens die Amplituden klein sind und dass zweitens keine Drehungen im Stativ stattfinden. Um die letzte Voraussetzung plausibel zu machen, müssen die Schwingungsebenen beider Pendel zusammenfallen⁶³⁾. Die Integration der angegebenen Differentialgleichungen bietet theoretisch keine Schwierigkeit. Zur Ermittlung von γ_1 oder γ_2 ($\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ist als bekannt vorauszusetzen⁶⁴⁾) können Amplitudenbeobachtungen oder Schwingungsdauer- resp. Phasenbeobachtungen dienen.

Bei den Amplitudenbeobachtungen wird meistens das eine Pendel (das getriebene) vor der Beobachtung beruhigt, während man dem anderen Pendel (dem treibenden) eine starke Amplitude gibt. Das getriebene Pendel gerät dann in Schwingungen, aus deren Größe sich die Elastizität der Aufstellung ermitteln lässt.

Bezeichnet man nämlich den Quotienten der Amplituden beider Pendel mit r_{21} (Pendel 2 sei das getriebene) und setzt ausserdem:

62) Ch. Cellérier, Verhandlg. Konf. (München) 1880 Annex II.

63) Über die bei anderen Anordnungen anzuwendenden Differentialgleichungen siehe Ch. Cellérier, p. 6 der unter Fussn. 62) zitierten Arbeit und C. S. Peirce, Boston, Amer. Acad. Proc. 14 (1879), p. 99. Über Drehungen im Stativ vgl. auch M. Haüd, Ztschr. f. Instr. 16 (1896), p. 196.

64) Es ist $\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{M_1 h_1}{T_1^2} : \frac{M_2 h_2}{T_2^2}$, wenn M_1, M_2 die Massen der beiden Pendel und h_1, h_2 die Abstände ihrer Schwerpunkte von den Drehungsachsen bedeuten.

$$(19) \quad \begin{cases} T = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \delta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{T_1}{T_2}, \quad J_T = \frac{(T_2 - T_1) \pi}{2 T^2} \\ \gamma_1 : \gamma_2 = \mu_1, \quad \gamma_2 : \gamma_1 = \mu_2, \end{cases}$$

so gilt unter der angegebenen Voraussetzung, dass das getriebene Pendel zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist:

$$(20) \quad 1) \quad r_{21} = \mu_1 t^{65)}$$

$$(21) \quad 2) \quad r_{21}^{2\delta} = \mu_1^2 (\cosh \mu_1 t - \cos 2 \Delta \gamma t)^{66)}$$

(wenn die Rückwirkung des getriebenen Pendels auf das treibende zu vernachlässigen ist, wenn also z. B. das getriebene Pendel ein leichtes Fadenpendel ist);

$$(22) \quad 3) \quad r_{21}^2 = J_T \frac{\mu_1^2 \sin^2 J_T}{\cos^2 J_T + \Delta \gamma^2 \sin^2 J_T} \quad J_T^2 = \Delta \gamma^2 + \mu_1 \mu_2^{66)}$$

(wenn beide Pendel gleiche Dämpfungskoeffizienten haben).

C. v. Orff⁶⁷⁾ hat bei seinen Beobachtungen ein stark gedämpftes Fadenpendel benutzt. In diesem Falle tritt bereits nach kurzer Zeit ein konstantes Amplitudenverhältnis der beiden Pendel ein. Bezeichnet man dieses mit ϵ , so gilt:

$$(23) \quad \epsilon = 2 r_{21} \sqrt{\delta^2 + \Delta \gamma^2}^{67)}$$

Will man das Mitschwingen durch Schwingungsdauerbeobachtungen ermitteln, so verfährt man am einfachsten so, dass man zwei sehr gut abgestimmte Pendel⁶⁸⁾ einmal mit annähernd gleicher und sodann

65) Nach der angegebenen Formel hat zuerst G. Lorenzoni (Relazione, p. 65) das Mitschwingen ermittelt, indem er als getriebenes Pendel ein Fadenpendel benutzte. R. Schumann (Ztschr. Math. Phys. 11 (1899), p. 102) hat die Methode eingehend studiert und durch Beobachtungen auf Stativen von verschiedener Elastizität ihre Brauchbarkeit nachgewiesen. Er benutzt als treibendes Pendel ein besonders schweres Pendel, das einen verschiebbaren Zylinder zur Regulierung seiner Schwingungen trägt. M. Haüd (Astr. Nachr. 143 (1897), p. 115 und 116 (1898), p. 331) benutzt die gleichen Pendel, die zur Schwerkraftmessung dienen. K. R. Koch (Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg 1901, p. 361) benutzt ein Fadenpendel, an dem als Pendelkörper ein Spiegel befestigt ist, der direkt zur Beobachtung mit Spiegel und Skala dient. Die angegebene

Formel ist bei gut abgestimmten Pendeln genügend genau, so lange $r_{21} < 0,1$; $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ist weiterhin macht sich die Rückwirkung geltend.

66) Ph. Furtwängler, Berl. Ber. 1902, p. 250.

67) v. Orff, p. 123 (283).

68) Es gelingt durch aufgelegte kleine Gewichte leicht, 2 Pendel bis auf 10^{-6} sek. abzustimmen.

mit annähernd entgegengesetzter Phase⁶⁹) schwingen lässt. Sind die für die beiden Versuche in Betracht kommenden Größen die folgenden:

Versuch	Schwingungsdauer des ersten Pendels	Schwingungsdauer des zweiten Pendels	Cosinus der mittleren Phasendifferenz
1	τ_1	τ_2	$1 - \epsilon_1$
2	$\tau_1 - \delta_1$	$\tau_2 - \delta_2$	$-1 + \epsilon_2$

so gilt:

$$(24) \quad \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$

wenn man den Amplitudenquotienten v_{21} bei den beiden Versuchen annähernd gleich $\sqrt{\tau_1/\tau_2}$ wählt, bei gleichen Pendeln also mit annähernd gleichen Amplituden beobachtet.

Wie man sieht, kommen für die praktischen Zwecke nur der Amplitudenquotient v_{21} und die Phasendifferenz der beiden Pendel, die wir mit f_{21} bezeichnen, in Betracht. Es ergibt sich deshalb eine einfache Ableitung der Gebrauchsförmeln, wenn man die komplexe Grösse

$$(25) \quad u_{21} = v_{21} (\cos f_{21} + i \sin f_{21})$$

eingführt, die der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(26) \quad \frac{du_{21}}{dt} = i\mu_2 u_{21} - 2(\delta_2 + i\Delta_2) u_{21} - i\mu_1$$

genügt⁷¹).

Da an dem Mitschwingen nicht nur das Pendelstativ, sondern auch der Pendelpfeiler und der Untergrund beteiligt sind⁷²), so ist die Ermittlung des Mitschwingens auch für relative Schwerkraftmessungen von Bedeutung. Über die Elimination des Einflusses des Mitschwingens durch Benutzung zweier Pendel gleicher Länge von verschiedenem Gewicht oder von gleichem Gewicht und verschiedener Länge vgl. Nr. 15.

8. Der Einfluss der Aufhängung. Das Gesetz der Amplitudenabnahme. Die Aufhängungsvorrichtung besteht meistens aus der am Pendel befestigten Schneide (Achat oder Stahl) und dem am Stativ

69) Dieser Beobachtungsfall entspricht einem von M. Faye zur Elimination des Mitschwingens gemachten Vorschlage, Verhandlg. Konf. (Stuttgart) 1877, p. 23.

70) Ph. Furtwängler, Berl. Ber. 1902, p. 262.

71) Ibid., p. 245—248. An dieser Stelle sind auch die Formeln (20) bis (23) aus der Differentialgleichung (26) abgeleitet, p. 248—253.

72) A. Hirsch in Verhandlg. Konf. (Stuttgart) 1877, p. 22—24.

angebrachten Lager (gewöhnlich Achat).⁷³) Für das Fadenpendel sind verschiedene Aufhängungsarten benutzt, entweder ist der Pendelfaden⁷⁴) direkt geklemmt oder er wird über einen kleinen Zylinder (Abwickelungszyylinder) geführt, von dem er sich abwickelt⁷⁵). Endlich hat man auch Schneiden benutzt; in diesem Falle ist die Einrichtung getroffen, dass die Schneide mit ihrer Fassung für sich annähernd dieselbe Schwingungsdauer hat wie das ganze Fadenpendel (synchronisierte Schneide)⁷⁶). Bei der in Nr. 11 angegebenen Differenzmethode zur Bestimmung von g vermittelt zweier Fadenpendel von verschiedener Länge wird der Einfluss der Aufhängung eliminiert.

Die bei der Pendelbewegung an der Schneide auftretenden elastischen Kräfte und Deformationen sind noch nicht ermittelt, man behilft sich mit empirischen Ansätzen⁷⁷). Den Einfluss des Abrollens der abgestumpften Schneide auf der Unterlage (beide als starr vorausgesetzt) ermittelten L. Euler⁷⁸) und P. S. Laplace⁷⁹) im Falle kreisförmigen Schneidenquerschnitts⁸⁰). Ist ρ der Krümmungsradius der Schneide und h der Abstand des Pendelschwerpunktes von der Schneide, so ist die Korrektur für die Länge l des gleichschwingenden mathematischen Pendels

$$(27) \quad + \frac{c}{h} l.$$

F. W. Bessel⁸¹) hat den allgemeinen Fall betrachtet, dass die Schneide von einem Zylinder mit kegelschnittförmigem Querschnitt begrenzt wird, der in der Ruhelage symmetrisch zur Vertikalen durch den Berührungspunkt verläuft, und als Korrektur

$$(28) \quad + \frac{bq}{h} l$$

ermittelt, wo b die Breite der Abstumpfung und q eine von der

73) Auf die zuerst von F. Baily benutzte umgekehrte Einrichtung ist in Nr. 13 hingewiesen.

74) Der Einfluss von Ungleichheiten des Pendelfadens ist von F. W. Bessel (Sekundenpendel, Beilage VIII) untersucht; er kommt praktisch nicht in Betracht.

75) Bei Bessel, Sekundenpendel, Beilage I, wird die Bewegung eines von einem horizontalen Zylinder sich abwickelnden Fadenpendels untersucht.

76) Borda, Collection 4, p. 19.

77) Vgl. Helmholtz, Beiträge III §§ 6, 9, 11, wo eine ausführliche Diskussion der möglichen Annahmen gegeben ist.

78) Nova Acta Acad. Petrop. 6 (1788) Hist., p. 93; Mém., p. 145.

79) Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 92.

80) Die von A. Lenzel gegebenen Entwicklungen (Ztschr. Math. Phys. 46 (1901), p. 471) dürfte kaum praktisches Interesse haben.

81) Sekundenpendel Art. 25—30 und Beilage IX und X.

Schneidenform abhängige Konstante bedeutet. Aus den angegebenen Formeln folgt, dass bei veränderlichem Krümmungsradius des Schneidenquerschnittes die Schwingungsdauer eines Pendels auch nach Anbringung der Reduktion auf unendlich kleine Amplitude (vgl. Nr. 5) noch von der Amplitude abhängen wird. Dadurch dürften die Unterschiede in den Schwingungsdauern erklärt werden, die *A. Sokolow*⁸²⁾ bei verschiedener Amplitude erhalten hat.

Experimentelle Untersuchungen über die Schneidenbewegung mit etwas unsicheren Ergebnissen sind angestellt von *F. W. Bessel*, *Th. v. Oppolzer*⁸³⁾, *Ch. Defforges* und *G. Lorenzoni*. Die drei ersten verfahren dabei in der Weise, dass ein in horizontaler Richtung sehr leicht verschiebbares Metallstück mit geringem Druck gegen die Schneide gedrückt wird, die es beim Gleiten mitnimmt, beim Rollen dagegen in seiner Lage lässt; die in entsprechender Weise vergrößerte Bewegung des Metallstücks (Fühlhebel, Interferenzfiguren) lässt sich dann beobachten.

*F. W. Bessel*⁸⁴⁾ fand auf diese Weise, dass die Schneide kleine, der Pendelamplitude proportionale Bewegungen ausführt, die in demselben Sinne wie die Bewegung des unteren Pendelendes erfolgen; das Maximum der Geschwindigkeit liegt bei dem Durchgang durch die Ruhelage. Der Umfang der Bewegung ist vom Schwerpunktsabstande unabhängig, dagegen abhängig von der Beschaffenheit der Unterlage. *F. W. Bessel* benutzte als Unterlagen Achat, mattgeschliffene Glasplatten, Glasröhren, Stahl, gehämmertes Messing und Messingdraht; besonders bei den beiden letzten Unterlagen, die weit weniger Härte besitzen als die zuerst genannten, zeigte sich die beschriebene Schneidenbewegung sehr deutlich. Bei ihnen war auch stärkere Dämpfung vorhanden wie bei den harten Unterlagen und eine beträchtlich kürzere Schwingungsdauer⁸⁵⁾. Die von *F. W. Bessel* gegebenen theoretischen Entwicklungen zur Schneidenbewegung erklären die beobachteten Tatsachen nicht völlig⁸⁶⁾.

*Ch. Defforges*⁸⁶⁾ nimmt an, dass die Pendelschneide zum Teil rollt, zum Teil gleitet wie in einem Zapfenlager. Das Gleiten soll der Pendelamplitude und dem Gewicht des Pendels proportional sein, dagegen unabhängig vom Schwerpunktsabstand; bei einem Meter-

82) Schriften der Kaiserl. Russ. geogr. Gesellschaft 25 (1892) S. A., p. 174.

83) Perm. Komm. (Paris) 1876 Annex I, p. 99.

84) Verschiedenartige Unterlagen können auch das Mitschwingen beeinflussen, wie *J. M. Barraquer* gefunden hat. Verhandlg. Konf. (Rom) 1883, p. 288.

85) *Helmert*, Beiträge, p. 77.

86) Perm. Komm. (Florenz) 1891, p. 154; Observations, p. 10.

pendel von 5 kg Gewicht findet er bei der Amplitude von 30' einen Gleitbetrag von 0,2 Mikron. Er setzt auch den Unterschied, den verschiedene von ihm benutzte Pendel bei der Bestimmung von g zeigen, wesentlich auf Rechnung des Gleitens der Schneiden, ob mit Recht oder Unrecht, mag dahingestellt bleiben.

G. Lorenzoni^{86a)} hat durch direkte mikroskopische Beobachtung der äussersten Schneidenquerschnitte den Mittelpunkt der Bewegung festzustellen gesucht.

Der Verlauf der Amplitudenabnahme wird bei den gewöhnlichen Pendeln, so lange die Amplitude nicht den Betrag von einigen Graden übersteigt, in genügender Weise dargestellt, wenn man für die Amplitude a den Ansatz macht⁸⁷⁾:

$$(29) \quad \frac{da}{dt} = A + Ba + Ca^2,$$

wo A , B , C Konstante bedeuten. Das Glied A repräsentiert die von der Geschwindigkeit unabhängigen Kräfte, die ihren Sitz wesentlich an der Schneide haben⁸⁸⁾; die Glieder Ba und Ca^2 , von denen das letztere nur bei grösseren Amplituden in Frage kommt, repräsentieren in der Hauptsache den Widerstand des umgebenden Mediums und den Einfluss der Schneidenreibung, soweit er der ersten oder zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Sie entsprechen in der Differentialgleichung (11) der Pendelbewegung Gliedern von der Gestalt $x \cdot \frac{dq}{dt}$ und $\pm x' \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)^2$.

Über die Darstellung grösserer Reihen von Amplitudenbeobachtungen sei folgendes erwähnt. Mehrere in der Survey of India⁸⁹⁾ angegebene über rund 22 Stunden sich erstreckende Reihen von Amplitudenbeobachtungen (Luftdruck 0,95 Atmosphären, Amplitudengrenzen 80' und 5') werden genügend dargestellt⁹⁰⁾, wenn man in (29) A und C gleich Null setzt, also Abnahme der Amplitude in geometrischer Progression annimmt. *Th. v. Oppolzer*⁹¹⁾ hat mit einem Repsold'schen Reversionspendel eine Reihe von Amplituden bei gewöhnlichem Luft-

86) Venezia Ist. Atti (7) 5 (1893-94), p. 9.

87) *J. F. W. Gramm*, Progr. der Johannissschule Danzig 1850; *Peiree*, Methods, p. 33; *Th. v. Oppolzer*, Wien. Ber. 86 (1882), p. 713; v. *Orff*, p. 65 (225); *Lorenzoni*, Relazione, p. 41.

88) *A. J. F. Yvon Villarceau*, Paris, Ann. de l'observ., Mémoires 15 (1880), p. B 1.

89) *S. D. Poisson*, J. de polytechn. 7 (1808), p. 143 und 8 (1809), p. 345.

90) Survey of India 6, p. 127 u. 213.

91) v. *Orff*, p. 71 (231).

92) Citat in Fussn. 87.

er für die durch die verlorenen Kräfte hervorgerufenen Verbiegungen des Pendelkörpers die Voraussetzungen machte, welche die Technik bei Trägern von konstantem Querschnitt anwendet (Existenz einer neutralen Faserschicht u. s. w.). Indem er ferner noch in die Störungsglieder die Grössen der ungestörten Bewegung einführt, erhält er als erste Näherung das folgende Resultat. Bedeutet T' die gestörte, T die ungestörte Schwingungsdauer und nimmt man die nach unten gerichtete Längsaxe des Pendels als positive x -Axe mit dem Koordinatenanfangspunkt im Drehpunkt, so gilt:

$$(31) \quad T' = T \left(1 + \frac{i}{2Mh} \right), \quad i = \int (1 - \frac{x}{l}) \eta_0 dm,$$

wobei dm ein Massenelement bedeutet und die Integration für i über den ganzen Pendelkörper zu erstrecken ist. η_0 charakterisiert die Grösse der Biegung ($\eta_0 \sin \varphi$ ist direkt die Ausbiegung der Pendellängsaxe für die Elongation φ) und ist aus folgender Differentialgleichung zu ermitteln:

$$(32) \quad \frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{g}{E \mathcal{I}} \int_a^l (l - x)(x - a) dm,$$

in der das Integral von der Abscisse a , für die η_0 ermittelt werden soll, bis zum unteren oder oberen Ende des Pendels zu erstrecken ist, je nachdem a positiv oder negativ ist. Ferner bedeutet E den Elastizitätsmodul des Pendels, \mathcal{I} das Trägheitsmoment des Querschnitts mit der Abscisse a für die in der Mitte des Querschnitts verlaufende zur Pendelaxe parallele Axe, und die Integrationskonstanten für η_0 sind so zu bestimmen, dass für $a = 0$ sowohl η_0 als $\frac{d\eta_0}{da}$ verschwinden.

Für die wenig biegsamen Reversionspendel gibt Helmholtz eine Näherungsformel¹⁰⁰⁾ für die Korrektion der Länge des Sekundenpendels, aus der folgt, dass diese Korrektion auch für die steifen Reipsold'schen Reversionspendel den Betrag von einigen Mikron erreicht. Für das erwähnte stark biegsame Reversionspendel des Geodätischen Instituts in Potsdam wurden die sich ergebenden Integrale durch mechanische Quadratur ausgewertet. Das Resultat (≈ 366 Mikron),

100) Verhandlg. Konf. Berlin 1895, p. 60.

101) Beiträge I; Astr. Nachr. 143 (1897), p. 349.

102) Beiträge, p. 14, Formel (42).

das Problem von neuem zu formulieren, wenn wir konstante Reversionspendel gültigen, sehr unständlichen Formeln stimmen indessen innerhalb der bereits durch die Ungenauigkeit der Voraussetzungen bedingten Genauigkeitsgrenze mit den einfachen Helmholtz'schen Näherungsformeln überein.

10. Der Einfluss der Temperatur. Der Einfluss der Temperatur auf die Länge und die Schwingungszeit eines Pendels kann als linear gelten.

Die für die Reduktion von Schwingungsdauerbeobachtungen auf eine Normaltemperatur nötige Temperaturkonstante wird experimentell durch Beobachtungen bei verschiedener Temperatur ermittelt. Die Berechnung derselben aus dem Ausdehnungskoeffizienten des Materials, aus dem das Pendel hergestellt ist, ist nicht so genau.

Zeitliche Temperaturschwankungen sind auf ein möglichst geringes Mass herabzudrücken, da sonst die verschiedene Trägheit der Pendel und der Thermometer gegenüber Temperaturänderungen von Einfluss wird¹⁰⁴⁾. Es ist deshalb ein Raum mit wenig veränderlicher Temperatur ein Haupterfordernis für Schwerebestimmungen, seien es absolute oder relative.

Eine Schichtung der Temperatur mit der Höhe lässt sich selten ganz vermeiden; rechnet man dann mit der mittleren Temperatur, so ist bei den Messungen mit dem Reversionspendel noch eine kleine Korrektion anzubringen, die von C. S. Peirce¹⁰⁵⁾ und F. R. Helmert¹⁰⁶⁾ ermittelt ist; sie beträgt unter den gewöhnlichen Verhältnissen nur einige Zehntel Mikron.

103) Il nuovo Cimento (4) 9 (1898), p. 260; 10 (1899), p. 85 u. 305.

104) Um diesen Einfluss zu vermindern, hat man besondere Thermometer, die sogenannten Pendelthermometer konstruiert (Vgl. C. A. F. Peters, Perm. Komm. (Paris) 1875, p. 101. Man befestigt das Thermometer an einem Metallstück, das die gleiche Gestalt besitzt wie die benutzten Pendel („dummy“, Survey of India 5, p. [12]). Besonders günstig ist es, wenn das Quecksilbergefäss von einer in der Pendelstange befindlichen Röhre gebildet wird. Ist die zeitliche Temperaturänderung gross, so muss man zur Reduktion die vollständige

Formel $\alpha\theta + \beta \frac{d\theta}{dt}$ benutzen, in der θ die Temperatur und α und β zwei experimentell zu bestimmende Konstanten bedeuten. Vgl. Survey of India 5, p. [95] und „Schwerkraft von Kolberg bis Schneekoppe“, p. 152 u. 191.

105) U. S. Survey 1885 App. 17, p. 509.

106) Beiträge, p. 92, Formel (71).

C). Die Methoden zur Bestimmung von g mit Hilfe des Pendels.

11. Zwei Fadenpendel von verschiedener Länge. Die Unsicherheit in der Längenmessung bei dem Fadenpendel wird vermieden, wenn man nach einem Vorschlage von *J. Whitehurst*¹⁰⁷⁾ zwei sonst gleiche Fadenpendel von verschiedener Länge benutzt. Die Beobachtung der Schwingungszeiten beider Pendel und ihrer Längendifferenz gestattet die Berechnung von g . Die Übertragung der angegebenen Beobachtungsmethode ins Praktische durch *F. W. Bessel*¹⁰⁸⁾, der sie selbständig gefunden hatte, ist eine epochemachende Leistung auf dem Gebiete der absoluten Schwerkraftsmessungen. Über die Ausführung der Längenmessung, bei der eine Toise direkt als Endmass benutzt wurde, vgl. *Bessel*, Sekundenpendel, p. 20. Bei der angegebenen Methode fällt auch der Einfluss des Mitschwingens der Aufstellung und der Einfluss der Aufhängung fort. Über die Bestimmung des Luftinflusses vgl. Nr. 6.

12. Das symmetrische Reversionspendel. Das Prinzip des Reversionspendels beruht auf dem von *Chr. Huygens* entdeckten Satz, dass ein Pendel die gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man es um seine Drehungsaxe oder um eine durch den Schwingungsmittelpunkt zu ihr parallel gelegte Axe schwingen lässt. Daraus folgt, dass man die zu einer bestimmten Schwingungsdauer gehörige mathematische Pendellänge direkt sichtbar machen kann, wenn man ein Pendel konstruiert, das um zwei parallele, mit dem Schwerpunkt in einer Ebene, aber in verschiedenem Abstand von ihm liegende Axen die gleiche Schwingungsdauer hat. Der Abstand der beiden Schneidenaxen ist dann gleich der Länge des mathematischen Pendels, das dieselbe Schwingungsdauer wie das Reversionspendel hat.

Das erste Reversionspendel ist von *H. Kater*¹⁰⁹⁾ in der Weise konstruiert, dass er ein Schiebergewicht zur Herstellung gleicher Schwingungszeiten um die beiden Schneiden anbrachte. Das praktisch weit brauchbarere Verfahren, kleine Differenzen der Schwingungs-

107) An attempt toward obtaining invariable measures of length etc., London 1787.

108) *Bessel*, Sekundenpendel.

109) Vgl. Fussn. 4. Beschreibungen von Reversionspendelapparaten findet man in Astr.-geodät. Arbeiten im Jahre 1870, Publ. Preuss. Geod. Inst., Leipzig 1871, p. 110; *Lorenzoni*, Relazione, p. 77; *Defforges*, Observations, p. 26; *Helmert*, Beiträge, p. 32; *J. M. Barraquer*, Madrid, Mem. del inst. geogr. y estad. 8 (1859), p. 9.

11. Zwei Fadenpendel v. verschied. Länge. 12. Symmetr. Reversionspendel. 31

zeiten um die beiden Schneiden rechnerisch zu berücksichtigen, ist bereits von *J. Bohnenberger*¹¹⁰⁾ angegeben.

Bezeichnet man die Schwerpunktsabstände der beiden Schneiden mit h_1, h_2 , die Schwingungszeiten um die beiden Schneiden mit T_1, T_2 , wobei sich der Index 1 auf die vom Schwerpunkt entferntere Schneide bezieht, so gilt für die Schwingungsdauer τ eines mathematischen Pendels von der Länge des Schneidenabstandes Λ des Reversionspendels:

$$(33) \quad \tau^2 = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2} - \frac{M_1 h_1}{M(h_1 - h_2)} (T_1^2 - T_2^2),$$

wenn M_1 die Masse der vom Pendel verdrängten Luft, M die Masse des Pendels und h_1 den Abstand des Schwerpunkts der verdrängten Luft von der Drehungsaxe bedeutet. Statt der vorstehenden Formel kann man die bequemere Näherungsformel:

$$(34) \quad \tau = T_1 + (T_1 - T_2) \cdot \frac{h_2}{h_1 - h_2} \quad (111)$$

benutzen, so lange $(T_1 - T_2) < 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot T_1$ ist. Für grössere Differenzen $T_1 - T_2$ sind in der letzten Formel auf der rechten Seite noch die Glieder:

$$(35) \quad - \frac{1}{2\tau} \left[\frac{h_1 h_2}{h_1^2 h_2^2} (T_1 - T_2)^2 + \frac{M_1 h_1}{M h_1 h_2} (T_1^2 - T_2^2) \right]$$

hinzuzufügen.

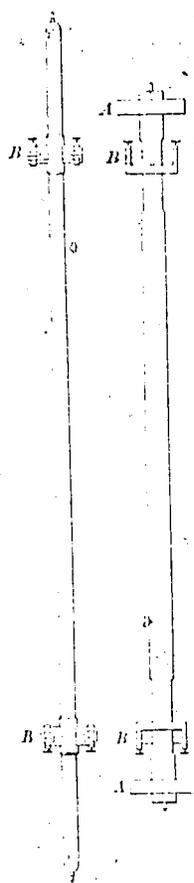
Die Vorteile des Reversionspendels kommen erst zur vollen Geltung durch die symmetrische Form, die ihm *F. W. Bessel*¹¹²⁾ gegeben hat, weil dadurch der Luftinfluss eliminiert wird. Um Symmetrie der Form herzustellen und gleichzeitig zu vermeiden, dass der Schwerpunkt in der Mitte zwischen beiden Schneiden liegt, hat *F. W. Bessel* an den Enden des Pendels zwei Gewichte von gleicher zylindrischer Gestalt angebracht (bei *A* in der Figur), von denen das eine hohl und das andere voll ist. *Ch. Defforges*¹¹³⁾ hat noch die weitere Verbesserung hinzugefügt, dass er die beiden zylindrischen Gewichte in

110) Vgl. auch Briefwechsel zwischen *C. F. Gauss* und *H. C. Schumacher*, Altona 1869, Bd. 2, p. 3.

111) Man erkennt aus dieser Formel zugleich, dass das Verhältnis der Schwerpunktsabstände h_1, h_2 nicht mit grosser Genauigkeit bestimmt zu werden braucht. Eine Beschreibung des zur Schwerpunktsbestimmung benutzten Apparates findet man in Astr.-geodät. Arbeiten im Jahre 1870, Publ. Preuss. Geod. Inst. Leipzig 1871, p. 92; *Lorenzoni*, Relazione, p. 92.

112) Astr. Nachr. 30 (1849), p. 1.

113) Observations, p. 26.



das Innere des Pendelmantels verlegt; dadurch ist noch leichter volle Gleichheit der äusseren Form vor und nach der Reversion zu erzielen. Man vergleiche die beiden nebenstehenden Figuren, die ein *Bessel Reipsolfsches* (rechts) und ein *Defforges'sches* Reversionspendel (links) mit 1 m Schneidenabstand in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Grösse wiedergeben. Bei B sitzen die beiden Schneidenhalter mit den Schneiden.

13. Die Messung des Schneidenabstandes. Da für die Länge des Sekundenpendels L die Gleichung:

$$(36) \quad L = \frac{A}{r^2}$$

besteht, so ist zur Ermittlung von L ausser r noch der Schneidenabstand A zu bestimmen, was meistens durch Vergleichung desselben mit einem Massstab im Vertikalkomparator geschieht. Von grosser Wichtigkeit für die Exaktheit dieser Längenmessung ist die richtige Beleuchtung der Schneiden. Bereits *H. Kater*¹¹⁴⁾ hat beobachtet, dass sich ein verschiedener Schneidenabstand ergibt, je nachdem mit hellen Schneiden auf dunklem Hintergrunde oder umgekehrt beobachtet wird. Die Ursache dieser Erscheinung ist zum Teil in Irradiationseinflüssen gesucht worden, zum Teil dem Umstande zugeschrieben, dass bei verschiedener Beleuchtung verschiedene Teile der Schneide reflektieren¹¹⁵⁾; vgl. dazu die Bemerkungen von *F. R. Helmert*, Beiträge, p. 50–52, der eine bei richtiger Beleuchtung am Rande der Schneide sich bildende sehr schmale Linie als Einstellungsobjekt empfiehlt. Bei den in den letzten Jahren im Geodätischen Institut zu Potsdam¹¹⁶⁾ angestellten Schwerekräftmessungen ist die Be-

114) *Kater*, Pendulum, p. 58.

115) *W. J. Heaviside*, Survey of India 5, p. 220; *Ch. Defforges*, Bull. Soc. phys. de France (1885), p. 112; *Th. v. Oppolzer*, Verhandlg. Konf. (Rom) 1883, Annex VIa, p. 12; *Lorenzoni*, Relazione, p. 26.

116) Vorläufige Angaben über diese Messungen findet man in den Berichten über die Tätigkeit des Zenträlbureaus der Internationalen Erdmessung im

leuchtung derartig gewählt worden, dass Schneide und Hintergrund möglichst gleich hell erscheinen; die sich gut markierende Grenze wurde dann mit dem Doppelfaden des Mikroskops eingestellt. Man vermeidet die angegebene Schwierigkeit, wenn man, anstatt die Schneiden im Pendel anzubringen und das Pendel dann auf einer ebenen Fläche schwingen zu lassen, umgekehrt ebene Flächen im Pendel anbringt und das Pendel auf einer festen Schneide schwingen lässt¹¹⁷⁾. Die an Stelle der Schneiden in das Pendel eingesetzten prismaartigen Körper mit den angeschliffenen ebenen Flächen tragen diesen parallele Striche auf den Seitenflächen. Der Abstand dieser Striche wird gemessen einmal, wenn die Prismen sich im Pendel befinden und zweitens, wenn sie mit den ebenen Schwingungsflächen aneinander gelegt sind. Die Differenz beider Messungen liefert den Abstand der Schwingungsflächen. Im übrigen vgl. man über die Elimination eines konstanten Längenmessungsfehlers Nr. 15 b.

Bei Messungen im Vertikalkomparator ist noch zweierlei zu beachten, nämlich erstens, dass der Massstab, dessen Untersuchung in horizontaler Lage ausgeführt wird, in vertikaler Stellung eine Verkürzung durch sein eigenes Gewicht erleidet¹¹⁸⁾, und zweitens, dass das Pendel vor und nach der Reversion infolge der verschiedenen Dehnung einen etwas verschiedenen Schneidenabstand hat. Man rechnet mit dem Mittel der beiden gemessenen Schneidenabstände. (Vgl. Nr. 14.) Wenn das Pendel schwingt, werden die Schneiden zusammengedrückt¹¹⁹⁾; bei den Längenmessungen wird dagegen der Abstand der undeformierten Schneiden ermittelt. Es ist nicht nötig, deshalb eine Korrektur anzubringen¹²⁰⁾.

Die Genauigkeit der Längenmessungen ist, von systematischen Fehlern abgesehen, ungefähr von der Grössenordnung 1 Mikron.

14. Spezielle Fehlerquellen des Reversionspendels.

1) *Verschiedene Krümmung der beiden Schneiden.* (Vgl. Nr. 8,

Jahre 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903 und in den Jahresberichten des Direktors des Kgl. Geodätischen Instituts von 1898/99 an bis 1903/04.)

117) Der erste derartige Vorschlag ist von *E. de Prany* in einem bereits 1800 verfassten, aber erst 1889 in Collection 4, p. 65 publizierten Mémoire gemacht. Die Priorität kommt *D. Daily* zu (Lond. Phil. Trans. 122 (1832), p. 417), der zuerst ein derartiges Pendel konstruierte. *T. C. Mendenhall*, Determinations of gravity, p. 530 und Amer. J. of science (3), 45 (1893), p. 141, hat zuerst die Verwendung dieser Anordnung für das Reversionspendel vorgeschlagen.

118) *Helmert*, Beiträge, p. 90, Formel 68.

119) Den Betrag der Zusammendrückung hat *J. M. Barraquer* zu ermitteln versucht, vgl. Madrid, Mem. del inst. geogr. y estad. 8 (1889), p. 114.

120) *Helmert*, Beiträge, p. 67.

Formel (27) und (28).) Man kann den Einfluss der verschiedenen Schneidenkrümmung eliminieren, wenn man, wie bereits *F. W. Bessel*¹²¹⁾ angegeben hat, die Schneiden vertauscht. Besser ist in dieser Beziehung wohl noch die Vertauschung der Gewichte, da hierdurch nicht nur der Schneideneinfluss, sondern eventuell auch ein Rest des Luftinflusses, der infolge von Unsymmetrie des Pendels übrig geblieben ist, eliminiert wird, und zwar ist es am günstigsten, wenn die Vertauschung der Gewichte (wie bei *Ch. Defforges*¹²²⁾) im Innern des Pendelmantels erfolgen kann.

Da die Krümmung des Schneidenquerschnitts im allgemeinen nicht konstant ist, so ist zur Elimination des Einflusses der Schneidenkrümmung notwendig, dass die Beobachtungen vor und nach der Reversion bei gleicher Amplitude ausgeführt werden. Da nun die Dämpfung, wenn das hohle Gewicht unten ist, etwa im Verhältnis $h_1 : h_2$ grösser ist als wenn das hohle Gewicht oben ist, so steht zur Bestimmung von T_2 auch eine entsprechend kleinere Beobachtungszeit als zur Bestimmung von T_1 zur Verfügung. Diese Verteilung der gesamten Beobachtungszeit auf T_1 und T_2 ist auch insofern günstig, als dadurch der mittlere Fehler von r annähernd zu einem Minimum gemacht wird¹²³⁾.

Es ist noch hinzuzufügen, dass durch Symmetriefehler des Pendels (wenn z. B. der Schwerpunkt des Pendels nicht in der Ebene der beiden Schneiden liegt) die Elimination des Einflusses der Schneidenkrümmung auch bei Innehaltung gleicher Amplitudengrenzen illusorisch werden kann. Ebenso ist, wenn der genannte Einfluss durch Schneidenvertauschung eliminiert werden soll, zu prüfen, ob die Widerlagflächen der Schneidenhalter in der Richtung quer zu den Schneiden parallel sind¹²⁴⁾.

2) Die geometrischen Bedingungen für das Reversionspendel. Die geometrischen Bedingungen, die ein Reversionspendel zu erfüllen hat, sind nicht immer genügend beachtet worden.

Von einem richtigen Reversionspendel werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt¹²⁵⁾:

121) Sekundenpendel Nr. 25.

122) Observations, p. 26.

123) *Helmert*, Beiträge, p. 48 Anmerk. In Bezug auf die Abhängigkeit der Dämpfung vom Schwerpunktsabstand vgl. man z. B. *J. M. Barraquer*, Madrid, Mem. del inst. geogr. y estad. 8 (1869), p. 257.

124) *Helmert*, Beiträge, p. 67.

125) *J. W. Lubbock*, Lond. Phil. Trans. 120 (1830) I., p. 201; v. *Oppolzer*, Bericht, p. 9 u. 46; *Lorenzoni*, Relazione, p. 103; *Helmert*, Beiträge p. 68—61.

- a) die beiden Drehachsen müssen parallel sein;
- b) Die Ebene der beiden Drehachsen muss den Schwerpunkt enthalten.
- c) Die äussere Form des Pendels muss in bezug auf beide Schneiden symmetrisch sein.

Über die Abweichungen, die bei den einzelnen Bedingungen zulässig sind, und über die Art und Weise, wie sie zu ermitteln sind, vgl. *Helmert*, Beiträge III, § 3 und 4.

3) Einfluss der Dehnung des Pendels. Der Zustand des Reversionspendels ist infolge seiner Elastizität vor und nach der Reversion ein anderer, weil die Masse unsymmetrisch verteilt ist. Rechnet man mit dem Mittel der beiden Schneidenabstände, die für volles Gewicht oben und unten gelten, so ist infolge der Dehnung des Pendels die berechnete Länge L des Sekundenpendels um den Betrag¹²⁶⁾:

$$(37) \quad \frac{L}{\Lambda} \delta \Lambda$$

zu korrigieren, wobei $\delta \Lambda$ die Differenz „Mittel der Schneidenabstände in vertikaler Lage des Pendels minus Schneidenabstand in horizontaler Lage“ bedeutet.

15. Benutzung von zwei Reversionspendeln.

a) von gleicher Länge und verschiedenem Gewicht. *Th. v. Oppolzer* hat zu seinen absoluten Schwerkräftmessungen in Wien zwei Reversionspendel von gleicher Länge und verschiedenem Gewicht benutzt, durch deren Kombination das Mitschwingen der Aufstellung und verschiedene Einflüsse, die von der Schneidenbewegung und den störenden Kräften an der Schneide herrühren, eliminiert werden können; seine Beobachtungen sind aber noch nicht in extenso publiziert. Sind M_I und M_{II} die Massen der beiden Pendel und L_I und L_{II} die mit beiden erhaltenen Resultate für die Länge des Sekundenpendels, so ist zu setzen:

$$(38) \quad L = L_I + \frac{M_I}{M_{II} - M_I} (L_I - L_{II}).$$

Günstiger als die eben angegebene Methode ist wohl die, welche *Ch. Defforges*¹²⁷⁾ vorgeschlagen und ausgeführt hat, nämlich zwei Reversionspendel

b) von gleichem Gewicht und verschiedener Länge zu benutzen,

126) *Helmert*, Beiträge, p. 91, Formel (70) und (70*). Vergl. auch *Astron. geodät. Arbeiten* in den Jahren 1872, 1869 u. 1867, Publ. Preuss. Geod. Inst. Leipzig 1874, p. 215.

127) Observations III, p. 21.

weil durch deren Kombination auch noch ein konstanter Längenmessungsfehler eliminiert wird. Sind Λ_I und Λ_{II} die Schneidenabstände der beiden Pendel und haben L_I und L_{II} dieselbe Bedeutung wie oben, so ist zu setzen:

$$(39) \quad L = \frac{\Lambda_{II}}{\Lambda_I - \Lambda_{II}} (L_I - L_{II}).$$

16. Resultate einiger absoluten Schwerkraftsmessungen. Zum Schluss fassen wir noch die Resultate einiger absoluten Schwerkraftsmessungen in der folgenden Tabelle¹²⁹⁾ zusammen.

Beobachter.	Beobachtungsort	g am Beobachtungsort.	g durch relative Messungen nach Potsdam übertragen.
<i>F. W. Bessel</i> <i>H. Ch. Schumacher</i> <i>C. F. W. Peters</i>	Berlin, Königsberg, Güldenstein.	—	981,254
<i>G. Pisati</i> und <i>E. Pucci</i>	Rom	980,343	981,270
<i>G. Lorenzoni</i>	Padua	980,648	981,260
<i>Th. v. Oppolzer</i>	Wien (Türkenchanze)	980,862	981,263
<i>Ch. Defforges</i>	Paris (Observatoire)	980,970	981,300
<i>J. M. Barraquer</i>	Madrid	979,977	981,270
<i>F. Kühnen</i> und <i>Ph. Furtwängler</i>	Potsdam (Geodät. Institut)	981,273	981,273

Wir bemerken zu der Tabelle, dass die Bestimmungen in den ersten beiden Zeilen mit Fadenpendeln, die übrigen mit Reversions-

129) Die Angaben sind zum Teil dem von *F. R. Helmert* erstatteten Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten, Verhandlg. Konf. (Paris) 1900, Bd. 2, p. 139 entnommen.

pendeln ausgeführt sind. Das von *G. Lorenzoni* erhaltene Resultat ist vom Verfasser um $+0,055$ korrigiert, um eine fälschlich angebrachte Amplitudenreduktion¹²⁹⁾ (riduzione all'amplitude zero) rückgängig zu machen; der *Defforges'sche* Wert ist von *F. R. Helmert*¹³⁰⁾ um $-0,030$ wegen der Elastizität der Pendel korrigiert, das Resultat von *Lorenzoni* und *v. Oppolzer* aus demselben Grunde um $-0,004$. Das Ergebnis der *Barraquer'schen* Messungen ist vom Verfasser, um die Elastizität der Pendel zu berücksichtigen und infolge anderer Zusammenfassung der Beobachtungen, um $0,039$ verkleinert worden.

II. Die Wage.

17. Einleitung. Im folgenden soll nur die *gleicharmige Balkenwage* mit Gehängen, die allein zu Präzisionswägungen benutzt wird, in zwei Abschnitten behandelt werden, von denen der erste die *Theorie der Wage*, der zweite die *Theorie der Wägung* umfasst. Es mag gleich darauf hingewiesen werden, dass sich diese äusserliche Trennung inhaltlich nicht ganz scharf durchführen lässt, da die beiden Abschnitte in engster Wechselbeziehung stehen. Technische Details der Wagenkonstruktion, die gerade bei der Präzisionswage eine hervorragende Rolle spielen, konnten mit Rücksicht auf den Zweck des Artikels und den verfügbaren Raum nur gestreift werden.

A) Theorie der Wage.

18. Prinzip der Wage. Die Benutzung der Wage zu Massenvergleichen beruht auf dem schon *Archimedes* bekannten Prinzip des Hebels, aus dem sich die Hauptbedingungen für das richtige Funktionieren einer Wage ergeben. Hierüber, sowie über die gebräuchlichen Bezeichnungen der Wagenteile, die im folgenden als bekannt vorausgesetzt werden, vergleiche man die Lehrbücher der Experimentalphysik¹³¹⁾. Es sei gleich noch bemerkt, dass eine Wägung nicht eigentlich eine Massenvergleichen, sondern eine Vergleichung von Drehungsmomenten ist. Der Übergang von den Drehungsmomenten zu den Massen ist in Nr. 30 besprochen.

19. Empfindlichkeit. Man versteht unter Empfindlichkeit einer Wage gewöhnlich die Veränderung der Gleichgewichtslage, die ein

129) Relazione, p. 206.

130) Beiträge, p. 15.

131) Die erste ausführlichere Theorie der Wage hat *L. Euler* gegeben: De bilancibus, Petrop. Comm. 10 (1747).