



VI 1, 4. KARTOGRAPHIE.

VON

R. BOURGEOIS UND PH. FURTWÄNGLER
IN PARIS IN AACHEN.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Problemstellung. Allgemeine Analyse der Verzerrungen.
3. Perspektiven.
4. Konische Abbildungen oder Kegelprojektionen*) und ihre Grenzfälle. Überblick und Einteilung.
5. Azimutale Abbildungen.
6. Zylindrische Abbildungen.
 - a) Flächentreue zylindrische Abbildungen.
 - b) Winkeltreue zylindrische Abbildungen.
 - c) Mittabstandstreue zylindrische Abbildungen.
7. Konische Abbildungen.
 - a) Flächentreue konische Abbildungen.
 - b) Winkeltreue konische Abbildungen.
 - c) Mittabstandstreue konische Abbildungen.
8. Unechte Kegelprojektionen nebst Grenzfällen.
 - a) Die *Bonnesche* Projektion.
 - b) Die *Sanson-Flamsteedsche* Projektion.
 - c) Flächentreue Projektionen, bei denen die Parallelkreise durch ein System von parallelen Geraden abgebildet werden.
 - d) Die *Planisphäre von Aitow* und verwandte Entwürfe.
9. Polykonische Projektionen.
10. Polyederprojektion. Gradabteilungskarten.
11. Kreisnetze.
12. Projektion mit geringster Längenverzerrung nach *Tissot*.
13. Allgemeines über die winkeltreuen Abbildungen. Projektionen von *Tschobyschoff*, *Peirce* und *August*.

*) Das Wort „Projektion“ wird in der Kartographie nicht nur in dem in der projektiven Geometrie üblichen engeren Sinne gebraucht, sondern steht auch allgemein für Abbildung. Da dieser Sprachgebrauch eingebürgert ist, ist im folgenden neben dem Worte „Abbildung“ als gleichbedeutend die Bezeichnung „Projektion“ benutzt.

- J. H. Lambert*, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten aus: Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, 3. Teil, Berlin 1772 = Ostw. Klass. Nr. 54, herausg. von *A. Wangerin* (*Lambert*, Land- und Himmelscharten).
- J. G. Lehmann*, Darstellung einer neuen Theorie zur Bezeichnung der schiefen Flächen im Grundriß oder der Situationszeichnung der Berge, Leipzig 1799.
- A. A. Markoff*, Über die günstigste Abbildung eines Teiles einer gegebenen Rotationsfläche auf die Ebene, Pétersb. acad. sci. bull. 1895 II (russ.).
- C. v. Orff* und *C. M. Bauernfeind*, Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873.
- C. S. Peirce*, A quincuncial projection of the sphere, Amer. Journ. Math. 2 (1879).
- A. M. Perrot-Bourgoins*, Nouveau manuel complet pour la construction et le dessin des cartes géographiques, Paris 1903.
- M. Rosenmund*, Die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung, Bern 1903.
- v. Schmidt*, Die Projektionsmethode der Trigonometrischen Abteilung der Kgl. Preuß. Landesaufnahme, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894).
- Ch. M. Schols*, Eene equivalente projectie met minimumafwijking voor een cirkelvormig terrein van geringe uitgebreidheid, Amsterdam Akad. van Wetensch. Versl. en Medd., Abt. Naturkunde (3) 2 (1886).
- O. Schreiber*, Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866.
- Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der Kgl. Preußischen Landesaufnahme. Formeln und Tafeln. Berlin 1897.
- Zur konformen Doppelprojektion der Kgl. Preußischen Landesaufnahme, Zeitschrift f. Vermess. 28 (1899); 29 (1900).
- A. Tissot*, Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris 1881.
- Die Netzentwürfe geographischer Karten, deutsche Bearbeitung von *E. Hammer*, Stuttgart 1887 (*Tissot-Hammer*).
- G. Wenz*, Atlas zur Landkartenentwurfslehre, München 1885.
- H. Wiechel*, Theorie und Darstellung der Beleuchtung von nicht gesetzmäßig gebildeten Flächen mit Rücksicht auf die Bergzeichnung, Civilingenieur 24 (1878).
- Wegen der allgemeinen Abbildungslehre sei auf die Lehrbücher der Flächentheorie und Differentialgeometrie verwiesen, von denen genannt seien:
- G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 3, 4, Paris 1894, 1895.
- L. Bianchi*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von *M. Lukat*, Leipzig 1899.

Historisches.

- M. A. P. d'Avezac*, Coup d'œil historique sur la projection des cartes de géographie, Bull. soc. géogr. Paris (5) 5 (1863), p. 257, 438. (Auch als Separatabzug erschienen.)
- Berthaut*, La carte de France, 1750—1898. Étude historique. T. I et II, Paris 1898—99.
- A. Breusing*, Gerhard Kremer, genannt Mercator, der deutsche Geograph, Duisburg 1878.
- J. Lelewel*, Géographie du moyen-âge, 4 vol., Bruxelles 1852—1857.

- A. E. Nordenskiöld, Facsimile-Atlas to the early history of cartography, Stockholm 1889.
 — Periplus, an essay on the early history of charts and sailing directions, Stockholm 1897.
 Vic. de Santarem, Essai sur l'histoire de la cosmographie et de la cartographie pendant le moyen-âge, 3 vol., Paris 1849—1852.
 W. Stavenhagen, Die geschichtliche Entwicklung des preußischen Militärkartenwesens, Leipzig 1901 (S.-A. aus Geogr. Zeitsch. 6 (1900)).
 — Skizze der Entwicklung und des Standes des Kartenwesens des außerdeutschen Europas, Peterm. Mitt., Ergänzungsheft 148, Gotha 1904.
 H. Wagner, Leitfaden durch den Entwicklungsgang der Seekarten, Bremen 1895.
 H. Wauvermans, Histoire de l'école cartographique Belge et Anversoise du XVI. siècle, 2 vol., Bruxelles 1895.
 R. Wolf, Handbuch der Astronomie usw., 2 Bde., Zürich 1890—93.
 W. Volkenhauer, Leitfaden zur Geschichte der Kartographie in tabellarischer Darstellung, Breslau 1895.

Das *Geographische Jahrbuch* bringt zusammenfassende Referate über Kartographie, die bisher von folgenden Autoren verfaßt sind:

- S. Günther, Die Fortschritte der Kartenprojektionslehre, Geogr. Jahrb. 9 (1882), p. 407; 10 (1883), p. 323; 12 (1888), p. 1; 14 (1890—91), p. 185.
 E. Hammer, Die Fortschritte der Kartenprojektionslehre, der Kartenzeichnung und der Kartenmessung, *ibid.* 17 (1894), p. 41; 19 (1896), p. 1; 20 (1897), p. 425; 24 (1901), p. 3.
 H. Haack, Die Fortschritte der Kartenprojektionslehre, Kartenzeichnung und -Vervielfältigung, sowie der Kartenmessung, *ibid.* 26 (1903), p. 359; 29 (1906), p. 321.

Endlich sei auf die *Mitteilungen des k. k. militärgeographischen Instituts* in Wien (seit 1881) hingewiesen.

Durchgehende Bezeichnungen.

- φ geographische Breite,
 λ geographische Länge,
 $\delta = 90^\circ - \varphi$ Poldistanz,
 α Azimut,
 R Krümmungshalbmesser im Meridian,
 r Krümmungshalbmesser im Parallel,
 x, y rechtwinklige Koordinaten in der Kartenebene,
 ϱ, ψ Polarkoordinaten in der Kartenebene,
 a, b Maximum, Minimum des Längenverhältnisses in einem Punkte,
 h Längenverhältnis im Meridian,
 k Längenverhältnis im Parallel,
 S Flächenverhältnis,
 2ω größte Winkelverzerrung in einem Punkte.

Verzeichnis der erwähnten Kartenprojektionen.

- Orthographische Pr., p. 256.
 Zentral- oder gnomonische Pr., p. 256.
 Stereographische Projektion, p. 257 = winkeltreue Azimutalprojektion, p. 262.

- Flächentreue Azimutalprojektion von *Lambert*, p. 262.
 Mittabstandstreue (äquidistante) Azimutalpr. (*Postel*, richtiger *Mercator*), p. 264.
G. B. Airys projection by balance of errors, p. 265.
A. Breusings vermittelnde Azimutalprojektion, p. 265.
 Abbildung eines schmalen Kugelstreifens nach *F. J. Müller*, p. 266, Fußn. 40.
 Flächentreue Zylinderprojektion mit längentreuem Hauptkreis (Äquator) von *Lambert*, p. 267.
 Flächentreue Zylinderprojektion mit kleinster Winkelverzerrung von *Tissot*, p. 267.
 Winkeltreue Zylinderpr. oder *Mercator*pr., p. 267.
 Quadratische Platkarte, p. 269.
Cassini-Soldnersche Projektion, p. 269.
 Rechteckige Platkarte, p. 269.
Lamberts flächentreue Kegelprojektion, p. 271.
 Flächentreue Kegelprojektion mit geringster Winkelverzerrung, p. 271.
Albers Kegelrumpfprojektion, p. 271.
 Kegelrumpfprojektion mit kleinster Winkelverzerrung von *Tissot*, p. 272.
Lambert-Gaußsche konforme Kegelprojektion (*Booles* Proj.), p. 273.
 Konforme Kegelprojektion mit kleinster Flächenverzerrung, p. 273.
 Gewöhnliche (einfache, wahre) Kegelprojektion von *Ptolemäus*, p. 274.
De VIsles Kegelprojektion, p. 275.
 Vereinfachte Kegelprojektion (*Mercators* Kegelproj.), p. 275, Fußn. 57.
Bonnesche Projektion, p. 275.
Sanson-Flamsteedsche Projektion, p. 278.
Stab-Wernersche Projektion, p. 279, Fußn. 66.
 Projektion von *Collignon*, p. 279.
 Projektion von *K. B. Mollweide* (homalograph. Proj.), p. 280.
Eckerts flächentreues Trapeznetz und Kreisringnetz, p. 279, Fußn. 69 und p. 280, Fußn. 72.
 Planisphäre von *Aitow*, p. 280.
 Flächentreue Planisphäre von *Hammer*, p. 280.
 Gewöhnliche polykonische Proj. (amerikanische polyk. Pr.), p. 281.
 Rechtschnittige polykonische Proj. (des englischen War Office), p. 281.
 Preußische Polyederprojektion (projezione naturale), p. 282.
 Winkeltreue Kreisnetze von *Lagrange* (*Lambert*), p. 283.
 Projektion von *Nicolosi* (Globularpr., englische Pr.), p. 284, Fußn. 88.
Nellsche Projektion, p. 284, Fußn. 88.
 Kreisnetz von *A. J. van der Grinten*, p. 284, Fußn. 88.
 Projektion mit geringster Längenverzerrung von *Tissot*, p. 285.
Tissots kompensative Kegelprojektion, p. 286.
 Quincuncialprojektion von *C. S. Peirce*, p. 289.
 Konforme Projektion von *August*, p. 289.
 Konforme Projektion von *P. L. Ischebyschoff*, p. 289.

I. Einleitung. Da die Erdoberfläche keine abwickelbare Fläche ist, kann man sie nur in der Weise auf eine Ebene oder ein Stück einer Ebene abbilden, daß man mehr oder weniger die Entfernungen, die Größen der Flächen, der Winkel usw. ändert¹⁾. Je nach den Be-

1) Daß eine Kugel nicht in den kleinsten Teilen kongruent auf eine Ebene

dürfnissen, welche die Karte befriedigen soll, wird man der Erhaltung oder wenigstens der geringsten Änderung dieser oder jener Größe bei der Abbildung den Vorzug geben, z. B. der Erhaltung der Winkel oder Erhaltung der Flächen. In anderen Fällen wird man versuchen, für die Bilder der Meridiane und Parallelkreise möglichst einfache Kurven, z. B. Gerade oder Kreise, zu erhalten.

Die Diskussion der Bedingungen, die in den verschiedenen Fällen zu berücksichtigen sind, die Aufsuchung der Wege, auf denen man das gewünschte Resultat erhalten kann und endlich die Herstellung des Liniensystems, das das Kartennetz liefert, bilden denjenigen Zweig der mathematischen Geographie, den man als *Kartenprojektionslehre* bezeichnet. Zur *Kartographie* im weiteren Sinne rechnet man noch die Darstellung der Höhenverhältnisse, die Wiedergabe der „Situation“ (Flußnetze, Wegenetze usw.) und im weitesten Sinne auch die Lehre von der technischen Herstellung und Vervielfältigung der Karten. Von diesen Dingen wird hier aber, da die mathematischen Gesichtspunkte dabei zurücktreten, nur teilweise und kurz die Rede sein.

Bei der Herstellung des Kartennetzes macht es einen wesentlichen Unterschied, ob der Maßstab der Karte groß oder klein ist²⁾. Unter dem Maßstab versteht man, allgemein zu reden, das Verhältnis der Länge eines Linienelementes im Original zur Länge seines Bildes³⁾ (*Längenverhältnis oder linearer Modul*). Ist dies Verhältnis groß (etwa größer als $\frac{1}{200\,000}$), so kann man auf einem handlichen Blatte nur ein relativ kleines Stück der Erdoberfläche abbilden. Dies Stück kann man aber praktisch als eben betrachten, so daß in diesem Falle das Kartenblatt ein innerhalb der Grenzen der Zeichen- und Messungsgenauigkeit völlig getreues Abbild der Wirklichkeit darstellt. Erst wenn der Maßstab kleiner ist, so daß man ein größeres Stück der Erdoberfläche auf einem Blatte abbilden kann, spielen die Verzerrungen

abgebildet werden kann, hat wohl zuerst *L. Euler* bewiesen, vgl. *Petrop. Acad. Acta* 1777, I., p. 107—132, speziell § 9.

2) Nach dem Maßstab pflegt man die Karten in *topographische* Karten (Maßstab größer als etwa 1:500 000) und *geographische* Karten (Maßstab kleiner als etwa 1:500 000) einzuteilen, wobei man die beiden Abteilungen noch wieder in Unterabteilungen zerlegt. Neuerdings teilt man auch in *Spezial-* und *General-karten* ein.

3) Das genannte Verhältnis ändert sich in der Karte im allgemeinen von Punkt zu Punkt und ist auch in den verschiedenen Richtungen in einem Kartenpunkte im allgemeinen verschieden. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, definiert man als Maßstab genauer das Längenverhältnis in einem bestimmten Punkt (gewöhnlich in dem Mittelpunkt der Karte) und in bestimmter Richtung (z. B. im Meridian).

Größen dritter Ordnung gleich groß und hat den Wert:

$$(69) \quad \varepsilon = As^2 - 2Bst + \left(\frac{1}{3} - A\right)t^2.$$

Die Konstanten A , B und die Lage des Nullpunktes sollen nun nach *Tissot* so bestimmt werden, daß der größte Wert von ε im Bereich der Karte im Minimum wird.

Die Linien gleicher Verzerrung sind, wie aus (69) folgt, je nach der Wahl von A und B Ellipsen, Hyperbeln oder Paare von parallelen Geraden; praktisch kommen meist bei Erfüllung der vorstehenden Forderung nur Ellipsen in Betracht. *Tissot* hat ein mechanisches Verfahren angegeben, um in einfacher Weise die verfügbaren Größen zu ermitteln. Man stelle sich Ellipsen mit verschiedenen Achsenverhältnissen, etwa für die Werte 0; 0,1; 0,2; ...; 1, dar und verschaffe sich von jeder Sorte eine Anzahl ähnlicher Ellipsen von verschiedener Größe. Man zeichnet nun eine Hilfskarte des abzubildenden Landes und sucht zuerst von jeder Sorte Ellipsen diejenige kleinste aus, die bei geeigneter Lage das Land gerade überdeckt. Unter diesen Deckellipsen wählt man dann diejenige, für die der den Achsenwinkel halbierende Durchmesser den kleinsten Wert hat. Der Mittelpunkt dieser Ellipse, wenn sie das abzubildende Land deckt, bestimmt dann den Nullpunkt, die Lage und Größe ihrer Achsen die verfügbaren Konstanten. Ein analoges Verfahren wäre auch mit Hyperbeln und Paaren paralleler Geraden anzustellen; es ist aber in praxi von vornherein meistens zu übersehen, daß diese Kurven zu schlechteren Resultaten als die Ellipsen führen.

Ist das abzubildende Land ungefähr symmetrisch zu einem Meridian oder Parallel, so vereinfachen sich die angegebenen Formeln; man hat dann bei dem beschriebenen mechanischen Verfahren die große Achse der Ellipse senkrecht zu der Symmetrielinie des Landes zu stellen. Ergibt sich außerdem aus den Versuchen noch der Wert von A nahe bei Null oder $\frac{1}{2}$, so gibt man A genau diese Werte und erhält dann sehr einfache Formeln. Der letzte Fall ($A = \frac{1}{2}$) liefert eine echte Kegelprojektion⁹⁰⁾.

Analoge Entwicklungen lassen sich auch für die Abbildung

90) Kompensative Kegelprojektion von *Tissot*, vgl. Paris C. R. 51 (1860), p. 964. Ein Beispiel ihrer Anwendung ist die Übersichtskarte von *Österreich-Ungarn* in 1:900 000 des milit.-geogr. Instituts. *J. Frischauf* gibt an, daß man die genannte Projektion erhält, wenn man in den Formeln für *Lamberts* konforme Kegelprojektion die auftretenden Funktionen in Potenzreihen bis zu den Gliedern 3. Ordnung entwickelt. Dabei ist aber vorauszusetzen, daß bei der konformen Kegelprojektion der Parallelkreis δ_0 , in dem der Kegel berührt (vgl. Nr. 7b), richtig gewählt wird.

schmäler Zonen zwischen Parallelkreisen oder schmaler Kugelzweiecke durchführen.

Um einen Vergleich der hier geschilderten Abbildungsart mit der *Bonneschen* Projektion zu geben, sei angeführt, daß bei der *Carte de France* in *Bonnescher* Projektion die größte Winkelveränderung $18'$ und die größte Längenverzerrung $\frac{1}{380}$ beträgt; bei einer geeignet gewählten Projektion von der Art der in dieser Nummer beschriebenen würden die entsprechenden Verzerrungen $25''$ und $\frac{1}{1100}$ sein. Bildet man Spanien in *Bonnescher* Projektion ab, so sind die maximalen Verzerrungen $12'$ für die Winkel und $0,0018$ für die Längen; für *Tissots* kompensative Kegelprojektion würden die entsprechenden Verzerrungen $4''$ und $0,0013$ betragen.

13. Allgemeines über die winkeltreuen Abbildungen. Projektionen von Tschebyschoff, Peirce und August. Die allgemeine Lehre von den winkeltreuen Abbildungen spielt in der Funktionentheorie und bei vielen Anwendungen physikalischer Natur eine wichtige Rolle und wird deshalb an anderen Stellen der Encyklopädie ausführlich behandelt⁹¹⁾; hier soll deshalb nur kurz auf sie eingegangen werden.

Historisch sei zunächst bemerkt, daß *J. H. Lambert*⁹²⁾ sich zuerst mit der allgemeinen Aufgabe beschäftigt hat, die Kugel winkeltreu auf die Ebene abzubilden. Er leitet die zugehörige Differentialgleichung ab, findet mit ihrer Hilfe außer schon bekannten (stereographische und Mercator-Projektion) einige neue winkeltreue Projektionsarten, gibt aber keine allgemeine Lösung der Aufgabe. *J. L. de Lagrange*⁹³⁾ hat dann allgemein die Aufgabe gelöst, eine beliebige Rotationsfläche konform auf die Ebene abzubilden oder, was auf dasselbe hinausläuft, zwei beliebige Rotationsflächen konform auf einander abzubilden; endlich hat *C. F. Gauß*⁹⁴⁾ die allgemeine konforme Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine andere beliebige Fläche bestimmt.

Um eine beliebige Rotationsfläche konform auf die Ebene abzubilden, ist es zweckmäßig, an Stelle der Breite φ oder ihres Kom-

91) Vgl. II B 1 Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen, Nr. 5, 21 u. f. (*W. F. Osgood*).

92) Land- und Himmelscharten, Abschnitt IV bis VII.

93) Sur la construction des cartes géographiques, Berlin Mém. Acad. 1779, p. 161.

94) Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, Astron. Abh., herausg. von *H. C. Schumacher*, 3. Heft, Altona 1825, p. 5.

plements δ , d. h. des Winkels der Flächennormalen mit der Rotationsachse, eine neue Veränderliche ξ durch die Gleichung⁹⁵⁾:

$$\xi = \int_0^\varphi \frac{R}{r} d\varphi,$$

wo R und r die Krümmungsradien im Meridian und Parallelkreis bedeuten, einzuführen. Durch die Kurvenscharen $\xi = \text{konst.}$ und $\lambda = \text{konst.}$ wird dann die Rotationsfläche in unendlichkleine Quadrate zerlegt, so daß es zur Herstellung einer konformen Abbildung genügt, in der Ebene zwei Kurvenscharen zu zeichnen, die die Ebene ebenfalls in unendlichkleine Quadrate einteilen, und diese Kurvenscharen den Kurven $\xi = \text{konst.}$ und $\lambda = \text{konst.}$ auf der Rotationsfläche entsprechen zu lassen. Geometrisch bedeutet ξ die Längendifferenz der Schnittpunkte einer Loxodrome mit Äquator und Parallelkreis φ , die den Winkel zwischen Meridian und Parallel halbiert.

Sind nun x und y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so lauten die Bedingungen für winkeltreue Abbildung:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = - \frac{\partial y}{\partial \xi},$$

oder durch Elimination von y

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Diese Gleichungen sind entsprechend dem oben entwickelten allgemeinen Gedankengange vollständig unabhängig von der speziellen Gestalt der Meridiane der Rotationsfläche.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung wird durch

$$x = f(\xi + i\lambda) + f_1(\xi - i\lambda),$$

gegeben, wo f und f_1 willkürliche Funktionen der beigesetzten komplexen Argumente sind. Soll x reell werden, so müssen f und f_1 konjugierte Funktionen sein. Der zugehörige Wert y ist:

$$y = \frac{1}{i} \{f(\xi + i\lambda) - f_1(\xi - i\lambda)\}.$$

Das Längenverhältnis in einem beliebigen Punkte wird:

$$\frac{2}{r} \sqrt{f'(\xi + i\lambda) \cdot f_1'(\xi - i\lambda)}.$$

In der angegebenen allgemeinen Lösung sind natürlich die früher betrachteten winkeltreuen Abbildungen als spezielle Fälle enthalten; so

95) Tissot-Hammer, p. 95 und p. 198.

ergibt sich z. B. für die Mercatorprojektion

$$x + iy = \xi + i\lambda, \text{ oder } x = \xi, y = \lambda.$$

Man kann die Verfügbarkeit über die Funktion f benutzen, um vorgeschriebene Bedingungen durch die Abbildung zu erfüllen. Man kann z. B. verlangen, daß eine beliebige Kurvenschar der Ebene das Bild der Meridiane oder Parallelkreise sei, ohne die Zuordnung der einzelnen Kurven der Schar festzulegen. Die Abbildung läßt sich dann stets so gestalten, daß sie winkeltreu wird.

Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen Meridianellipse die numerische Exzentrizität e besitzt, ergibt sich, wenn Glieder mit e^4 vernachlässigt werden:

$$\xi = \lg n \cotg \frac{\delta}{2} - e^2 \cos \delta.$$

Für die Erde ist $e^2 = 0,0068$; man erkennt daraus, daß man bei unseren Abbildungen die Erde als sphärisch betrachten kann.

Im Anschluß an die allgemeinen Entwicklungen seien einige früher noch nicht erwähnte winkeltreue Abbildungen kurz genannt, die Projektionen von *P. L. Tschebyschoff*, von *C. S. Peirce*⁹⁶⁾ (*Quincuncial-projection*) und die Projektion von *A. August*⁹⁷⁾ (*epizykloidische Pr.*). *Tschebyschoff*⁹⁸⁾ bestimmt die in der allgemeinen Lösung auftretende willkürliche Funktion so, daß die Längenverzerrung in dem abzubildenden Gebiet ein Minimum wird. *Peirce* benutzt zur Darstellung der rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene elliptische Funktionen. Ein Vorzug seiner Abbildung ist, daß bei Abbildung der Vollkugel nur 6,6% der Kugeloberfläche mit einem Längenverhältnis größer als 2 abgebildet werden, während der entsprechende Flächenteil bei der Mercatorprojektion und besonders bei der stereographischen erheblich größer ist. *August* bildet die gesamte Kugelfläche auf das Innere einer Epizykloide ab, die durch Rollen eines Kreises vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ auf einem solchen vom Halbmesser 1 entsteht.

96) Amer. Journ. Math. 2 (1879), p. 394. Angewandt bei *Th. von Oppolzer*, Syzygientafeln für den Mond, Leipzig 1881. Vgl. auch *Pierpont*, Amer. Journ. Math. 18 (1896), p. 145; *G. Holzmüller*, Zeitschr. f. lateinlose Schulen 7 (1896), p. 332; *Siebeck*, J. f. Math. 57 (1860), p. 359.

97) Zeitschr. Ges. Erdk. 9 (1874), p. 1.

98) Pétersb. Acad. sci. bull. 14 (1856), p. 257 = Oeuvres 1, p. 231. *Tschebyschoff* untersucht auch, welche Gestalt ein Land haben muß, damit die winkeltreuen Kreisnetze von *Lagrange* (Nr. 11) die beste Abbildung liefern. Man vgl. ferner *D. A. Grave*, Über die Grundaufgaben der mathematischen Theorie der Kartenprojektion, Petersburg 1896, Abschnitt IV (russisch); C. R. ass. franç. avanc. sci., Caen 1894 und Carthage 1896. *A. Markoff*, Pétersb. Acad. sci. Bull. 1895, p. 177.