P 102

Association géodésique internationale.

De l'influence de la flexibilité du trépied sur l'oscillation du pendule à reversion

par
Mr. Peirce du Coast-Survey U.S.A.

Note communiquée par Mr. E. Plantamour.

13

Association géodésique internationale.

De l'influence de la flexibilité du trépied sur l'oscillation du pendule à reversion

par

Mr. Peirce, du Coast-Survey U.S.A.

Note communiquée par Mr. E. Plantamour.

Genève le 27 Août 1877.

Monsieur le Général Ibañez
Président de la Commission permanente de l'Association géodésique internationale.

Monsieur le Président,

Vous m'aviez fait l'honneur de me demander, dans le courant de l'hiver dernier, de présenter à la conférence devant se réunir à Stuttgart au mois de Septembre un rapport sur les résultats obtenus jusqu'à présent avec le pendule à réversion pour la détermination de la pesanteur. J'insistais dans ma réponse sur la difficulté de faire dans le moment actuel un rapport sur ce sujet, rapport qui me semblait être prématuré, et cela pour les deux raisons suivantes.

En premier lieu le nombre des stations dans lesquelles les résultats des expériences ont été publiés in extenso et avec des détails suffisants est extrêmement restreint; l'on trouve il est vrai dans l'un des derniers rapports généraux une liste assez nombreuse de stations dans lesquelles les expériences ont été faites, d'autres où elles sont seulement projetées, mais les résultats ne sont pas encore connus.

En second lieu, même pour les stations pour lesquelles une publication complète a eu lieu, les résultats ne peuvent être regardés que comme provisoires, parce que les observateurs n'ont pas tenu compte d'une cause de perturbation, qui peut exercer une influence très-sensible sur la durée de l'oscillation et sur la longueur du pendule simple, savoir le mouvement ou la flexion des supports, qui accompagne les oscillations.

Dans un mémoire inséré dans le cahier d'Octobre 1875 des Archives scientifiques de la Bibliothèque Universelle de Genève, Mr le Professeur Cellérier a étudié la théorie de ce mouvement des supports, et il a indiqué le moyen de reconnaître et de mesurer ce mouvement en même temps que la formule de correction à l'aide de laquelle on pouvait en tenir compte. Il avait été amené à s'occuper de ce sujet à la suite des entretiens qu'il avait eus avec Monsieur Ch. Peirce, de Coast-Survey, lors du séjour que ce dernier avait fait à Genève, en vue de ses expériences sur le pendule.

Comme je savais que Monsieur Peirce s'était non seulement occupé de son côté de l'étude théorique de la question, mais qu'il avait fait en divers lieux des expériences très-complètes sur les mouvements des supports, il me paraissait très important que les observateurs fussent nantis le plus tôt possible du résultat de ses travaux. Aussi vous avais-je proposé dans ma lettre d'écrire à Monsieur Peirce, qui était retourné en Amérique pour le prier de consigner les résultats de ses recherches théoriques et expérimentales dans un mémoire qui serait inséré dans les publications de l'Association géodésique internationale. Sur la réponse favorable que j'ai reçue, j'ai effectivement écrit à Monsieur Peirce, qui a accueilli la demande avec la plus grande obligeance et s'est déclaré prêt à l'exécuter aussitôt qu'il aurait terminé quelques expériences qu'il se proposait encore de faire, ainsi que les calculs et les réductions de ses observations.

J'ai reçu tout dernièrement de Monsieur Peirce le mémoire ci-inclus rédigé en Français, dont l'impression immédiate me paraît être éminemment désirable, afin que les Commissaires et Délégués réunis à Stuttgart le mois prochain l'aient sous les yeux dans la discussion qui aura lieu sur le pendule à reversion, et qu'ils aient même pu en prendre connaissance auparavant.

Veuillez, je vous prie, Monsieur le Président, agréer l'expression de ma haute considération.

E. Plantamour

New York, 42, 7th Street
le 13 Juillet 1877.

Cher Monsieur le Professeur,

Lorsque je reçus la direction des études du Coast Survey des Etats-Unis sur la pésanteur, j'ai commandé à M. M. Repsold un pendule à réversion, qui devait être une copie de celui de l'Institut géodésique de la Prusse. Mais les mécaniciens étaient alors si occupés par la construction des instruments nécessaires pour le passage de Vénus, que le pendule ne fut fini qu'au printemps de 1875. Je me rendis alors à Hambourg pour le recevoir; et de Hambourg je passai à Berlin, où je trouvai Son Exc. M. le Général Baeyer peu satisfait des résultats obtenus avec un instrument semblable. Il se plaignit surtout de la flexibilité du pied, une source d'erreur, du reste, qui n'a assurément jamais échappé à l'attention des observateurs du pendule.* L'ap-

* On sait que Kater faisait usage du pendule renversé ou <u>noddy</u> de M. Hardy, pour s'assurer qu'il n'existait pas une oscillation de son support, isochrone à celle du pendule. Un écrivain dans l'<u>Encyclopedia Britannica</u> a proposé de faire usage de deux différents pendules à réversion de la même forme mais de différents poids, afin que l'on puisse tenir compte de l'erreur provenant de la flexion. Bessel, dans son grand mémoire sur la pésanteur à Königsberg, fait remarquer que cette cause exerce la même influence sur son pendule long que sur le court, et c'est pourquoi l'effet s'élimine. La construction de plusieurs supports des pendules, comme celui du Capitaine Basevi, montre une appréciation juste de cette difficulté.

pareil du pendule que j'avais apporté d'Amérique était presque abîmé dans le transport. Ainsi, je me suis trouvé forcé de faire usage de l'instrument que la grande autorité du Général Baeyer avait prononcé défectueux, malgré la perfection du travail qui fait honneur même à l'atelier célèbre d'où il vient.

Voilà comment j'ai été amené à faire quelques expériences dans le but de mesurer et tenir compte de ces défaut.

On peut s'imaginer un support si disloqué que le pendule, en oscillant de l'un côté à l'autre, jetterait la pièce sur laquelle il repose d'une position dans une autre, sans rencontrer, jusqu'aux points d'arret, d'autre résistance que celle de l'inertie et de la friction. Mais un tel jeu n'existe point dans les supports que je connais, ce que j'ai vérifié en les observant avec un micoscope fort et en reconnaissant qu'ils retournent toujours à la première position de repos après toute flexion, si petite ou si grande qu'elle soit.

En effet, ce qui arrive c'est une flexion oscillatoire d'un corps élastique. L'amplitude de cette oscillation est à peu près en raison d'un cinq-millième à celle du couteau inférieur du pendule; c'est pourquoi on peut négliger le carré de cette fraction.

La langue sur laquelle repose le couteau est courbée, sans doute, par le mouvement du pendule; mais je néglige cet effet, en me bornant à considérer le mouvement de la partie au dessous du milieu du couteau. Quand on y applique une force horizontale perpendiculaire au couteau, cette partie fait un mouvement de révolution autour d'une axe située en arrière et au-dessus du pied, à une distance d'un mètre environ. Or, on peut négliger la différence entre une révolution passant seulement par quelques secondes d'arc et une translation. Il y a encore une certaine variation minime dans la pression verticale du pendule sur le support; mais elle est évidemment loin de produire un effet sensible sur la durée d'une oscillation

Nommons,

$\underline{m}$, la masse d'une particule;

$\underline{r}$, sa distance de la tranche du couteau;

$\underline{\omega}$, l'angle, dans la position de repos, entre la verticale et la perpendiculaire abaissée de la particule sur la tranche du couteau;

M, la masse du pendule

$\underline{h}$, la longueur du pendule simple ayant le période du pendule actuel;

$\underline{g}$, l'accélération de la pesanteur;

$\underline{\phi}$, l'élasticité du pied;

$\underline{t}$, le temps;

φ, l'angle, au moment $\underline{t}$, entre la position du pendule et celle de repos;

$\underline{s}$, l'écartement horizontal, au moment $\underline{t}$, du centre de la tranche du couteau, de la position de repos.

Alors, la la vitesse horizontale d'une particule sera

$$\underline{r} \cos(\varphi + \omega) . D_{\underline{t}}\, \varphi + D_{\underline{t}}\, \underline{s}\ ;$$

la vitesse verticale de la même particule sera

$$\underline{r} \sin(\varphi + \omega) . D_t\, \varphi\ ;$$

l'énergie actuelle de la particule sera

$$\tfrac{1}{2}\,\underline{m}\,\underline{r}^2\,(D_t\ \varphi)^2 + \underline{m}\,\underline{r}\,\cos(\varphi+\omega)\,(D_t\,\varphi)\,D_t\,\underline{s}) + \tfrac{1}{g}\,\underline{m}\,(D_t\,\underline{s})^2\ ;$$

et l'énergie actuelle du pendule sera

$$\tfrac{1}{2}\,M\,\underline{l}\,\underline{h}\,(D_t\,\varphi)^2 + M\,\underline{h}\,\cos\varphi\,(D_t\,\varphi)\,(D_t\,\underline{s}) + \tfrac{1}{2}\,M\,(D_t\,\underline{s})^2.$$

Quant à l'énergie du mouvement du pied, on peut la négliger, puisqu'elle se compose d'un petit moment d'inertie multiplié par le carré d'une vitesse très petite. La différentielle de l'énergie potentielle est

$$-\,M\,g\,\underline{h}\,\sin\varphi\,.\,d\,\varphi - \mathfrak{C}\,\underline{s}\,.\,d\,\underline{s}.$$

Il y a, c'est vrai, un troisième terme, qui dépend de la friction entre le molécule du pied. Mais je crois que l'on peut négliger ce terme, dont l'effet doit être peu considérable, et dont le coëfficient est en tout cas, inconnu.

On dérive, des expressions pour l'énergie actuelle et potentielle, les équations différentielles

$$\underline{l}\,D_t^2\,\varphi + \cos\varphi\,.\,D_t^2\,\underline{s} + \sin\varphi\,.\,D_t\,\varphi\,.\,D_t\,\underline{s} = -\,g\,\sin\varphi$$

$$\underline{h}\,D_t^2\,\varphi + D_t^2\,\underline{s} = -\,\frac{\mathfrak{C}}{M}\,\underline{s}\,.$$

Mais l'amplitude de $\underline{s}$ multipliée par celle de φ, et divisée par $\underline{h}$, donne un nombre insignifiant. De plus, l'effet d'une variation de l'amplitude de φ doit être insensible sur la correction pour la flexion. C'est pourquoi l'on peut écrire

$$\underline{l}\,D_t^2\,\varphi + D_t^2\,\underline{s} = -\,g\,\varphi$$

$$\underline{h}\,D_t^2\,\varphi + D_t^2\,\underline{s} = -\,\frac{\mathfrak{C}}{M}\,\underline{s}\,.$$

Pour résoudre ces équations, on multiplie la seconde par $\underline{x}$, et on l'ajoute à la première. On obtiendra

$$D_t^2\left\{(\underline{l}+\underline{h}\,\underline{x})\,\varphi+(1+\underline{x})\,\underline{s}\right\}=-\frac{g}{\underline{l}+\underline{h}\,\underline{x}}\left\{(\underline{l}+\underline{h}\,x)\varphi+\frac{c\,\underline{x}(\underline{l}+\underline{h}\,x}{Mg}\,\underline{s}\right\}$$

et, en posant

$$\frac{c\,\underline{x}\,(\underline{l}+\underline{h}\,\underline{x})}{Mg}=1+\underline{x}$$

l'équation se réduit à la forme

$$D_t^2\,X=-\frac{g}{\underline{l}+\underline{h}\,x}\,X\;;$$

dont l'intégrale est

$$(\underline{l}+\underline{h}\,\underline{x})\;\varphi+(1+\underline{x})\,\underline{s}=X=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\underline{l}+\underline{h}\,\underline{x}}}\cdot t+\eta_{1}\right).$$

L'équation pour déterminer x donne

$$\underline{x}=-\frac{1}{2}\;\frac{c\,\underline{l}-Mg}{c\,\underline{h}}\pm\frac{1}{2}\,\frac{\underline{l}}{\underline{h}}\;\sqrt{4\frac{Mg\underline{h}}{c\,\underline{l}^2}+\left(1-\frac{Mg}{c\,\underline{l}}\right)^2}$$

ou à peu près

$$\underline{x}=-\frac{1}{2}\,\frac{\underline{l}}{\underline{h}}+\frac{1}{2}\,\frac{Mg}{c\,\underline{h}}\pm\left(\frac{1}{2}\,\frac{\underline{l}}{\underline{h}}-\frac{1}{2}\,\frac{Mg}{c\,\underline{h}}+\frac{Mg}{c\,\underline{l}}\right);$$

ainsi les deux valeurs de x seront

$$\underline{x}_1=\frac{Mg}{c\,\underline{l}}$$

$$\underline{x}_2=-\frac{\underline{l}}{\underline{h}}+\frac{Mg}{c\,\underline{h}}-\frac{Mg}{c\,\underline{l}}.$$

En substituant ces deux valeurs dans l'équation intégrale, on aura les deux équations suivantes entre φ et $\underline{s}$.

$$\left(l+\frac{Mgh}{\mathfrak{C}\, l}\right)\varphi+\left(1+\frac{Mg}{\mathfrak{C}\, l}\right)\underline{s}=A_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{\mathfrak{C}\, l}}}\;t+\eta_1\right).$$

$$\left(\frac{Mg}{\mathfrak{C}}-\frac{Mgh}{\mathfrak{C}\, l}\right)\varphi+\left(1-\frac{l}{h}+\frac{Mg}{\mathfrak{C}\, h}-\frac{Mg}{\mathfrak{C}\, l}\right)\underline{s}=A_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{\mathfrak{C}\, l}}}\;t+\eta_2\right),$$

d'où l'on tire

$$\varphi=-\frac{l-h}{h}A_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{\mathfrak{C}\, l}}}\;t+\eta_1\right)-A_2\cos\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{C}\, l}{M(l-h)}}\;t+\eta_2\right).$$

$$\underline{s}=-\frac{Mg}{\mathfrak{C}}\,\frac{l-h}{h}A_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{\mathfrak{C}\, l}}}\;t+\eta_1\right)+l\,A_2\cos\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{C}\, l}{M(l-h)}}\;t+\eta_2\right).$$

Maintenant, il s'agit de déterminer les constantes arbitraires. On doit considérer donc, qu'en mettant en mouvement le pendule, on le pousse de côté, en appliquant le doigt auprès du couteau inférieur, et alors on le laisse aller. Ainsi, lorsque t est nul, $D_t\varphi$ et $D_t\underline{s}$ sont aussi nuls, de sorte que η_1 et η_2 disparaissent. Au premier instant, la force horizontale sur le couteau est

$$\frac{Mgh}{l}\varphi_0=\mathfrak{C}\,\underline{s}_0$$

ce qui donne en substituant les valeurs de φ et de $\underline{s}$,

$$\frac{Mgh}{l}(1+x_2)A_1-\frac{Mgh}{l}(1+x_1)A_2=-\mathfrak{C}(l+h x_2)A_1+\mathfrak{C}(l+h x_1)A_2$$

ou, approximativement

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M g^2 (l - h)}{\varphi^2 \, l^3}.$$

Ainsi, en écrivant $A = (l - h) A_1$, on aura

$$\varphi = -\frac{A}{h} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{M g h}{\varphi l}}} \cdot t\right) - \frac{M^2 g^2}{\varphi^2 l^3} A \cos\left(\sqrt{\frac{\varphi l}{M(l-h)}} \cdot t\right)$$

$$s = -\frac{M g}{\varphi l} A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{M g h}{\varphi l}}} \cdot t\right) + \frac{M^2 g^2}{\varphi^2 l^2} A \cos\left(\sqrt{\frac{\varphi l}{M(l-h)}} \cdot t\right).$$

Le deuxième terme de φ n'est que la $\frac{1}{300,000}$ du premier, ainsi on peut le négliger.

On mesure φ, en observant la déflexion, S, du pied, produite par une force horizontale égale à l'unité de poids; ce qui s'écrit

$$\varphi = \frac{g}{S}.$$

Ou substituant cette valeur, on conclut, enfin

$$\varphi = \frac{A}{h} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + M S \frac{h}{l}}} \cdot t\right).$$

Ainsi, l'effet sur le pendule est de lui donner une longueur virtuelle plus grande que sa longueur actuelle par $M S \frac{h}{l}$

Indiquons la durée d'une oscillation par T, et les corrections provenant de la flexion par Δ; alors, nous avons

$$T^2 = \frac{\partial^2 l}{g}$$

et

$$\Delta T^2 = \frac{\partial^2}{g} MS \frac{h}{l}.$$

Or, en distinguant par des chiffres subjacents les deux positions du pendule à reversion, la formule pour la réduction des résultats obtenus d'un tel pendule est

$$\frac{\partial^2 l}{g} = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2},$$

d'où

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 l}{g}\right) = \frac{\partial^2}{g} MS \frac{h_1^2 - h_2^2}{l(h_1 - h_2)} = \frac{\partial^2}{g} MS,$$

ou bien $\Delta l = MS$

ou bien encore, en posant λ pour la longueur du pendule à secondes,

$$\Delta\lambda = MS \frac{\lambda}{l}.$$

Pour déterminer la quantité de la flexion, j'arrête dans la rainure de la langue au-dessous du milieu du couteau, une corde qui s'étend horizontalement et perpendiculairement au couteau, qui passe sur la roue d'une machine Atwood (convenablement disposée dans ce but) et à l'extrémité de laquelle est suspendu un Kilogramme. Au bout de la langue ou même sur un bras y attaché, je colle une échelle micrométrique en verre, tournée en tel sens qu'on puisse mesurer la flexion à l'aide d'un micromètre convenablement placé. Celui-ci repose sur un support particulier et indépendant dont le montant se compose d'un tuyau à gaz d'un diamètre d'environ dix centimètres.

Voici maintenant les expériences que j'ai faites pour déterminer la position de l'axe fixe autour de laquelle tourne le couteau.

A. Expériences faites au niveau du plan de suspension.

Hoboken, 10 mars 1877. Températ. 13°C.

Distance de l'échelle en avance du bout de la langue	Flexion en révolutions de la vis micrométrique observée	calculée
− 0^m. 496	+ 0. 211	+ 0. 209
+ 0. 053	+ 0. 356	+ 0. 358
+ 0. 318	+ 0. 436	+ 0. 431

Les quantités calculées supposent que l'axe coupe le niveau du plan de suspension, à une distance de 1^m.355 derrière le bout antérieur de la langue.

B. Expériences faites dans la verticale du bout antérieur.

Hoboken, 12 mars 1877. Temp. 14°C. Obs. le sous-assistant Smith.

Distance de l'échelle audessous du couteau	Flexion en révolutions de la vis micrométrique observée	calculée
− 0^m. 44	+ 0. 196	+ 0. 196
0. 000	+ 0. 340	+ 0. 332
+ 0. 395	+ 0. 446	+ 0. 454

Les quantités calculées supposent que l'axe coupe la verticale du bout antérieur de la langue, à une distance de 1m 07 au-dessus du niveau du plan de suspension. Il n'y a rien de surprenant à ce que l'axe instantané soit au-dessus du plan de suspension. Supposons, en effet, que la flexion demeurât exclusivement dans les trois pieds du support. En ce cas là, le mouvement du bout supérieur de chaque pied serait perpendiculaire au sens général du pied, et, en même temps, perpendiculaire au rayon du cercle de révolution, de façon à ce que le pied se dirigerait directement vers l'axe fixe. L'axe est, sans doute, en arrière du support à cause de la flexion de la langue même.

J'ai fait, à Genève, à Paris, à Berlin, et à New-York, des expériences pour déterminer la valeur numérique de S. L'expérience de Genève, faite le 13 Septembre 1875, n'était qu'un essai. Mais j'avais une bonne roue que j'avais empruntée à l'atelier de la Société Genevoise pour la construction d'instruments de physique, et j'ai obtenu comme valeur aproximative

$$S = 0^{mm}.034$$

La poulie dont je me suis servi à Paris avait une friction très considérable, à laquelle il faut attribuer la circonstance que les nombres trouvés s'écartent plus qu'il n'en faut de ceux que j'ai obtenus à l'aide des meilleurs appareils. Voici les chiffres

Le 18 Janvier 1876, chez M.M. Brünner (Temp 1°C) $S = 0^{mm}.0363$
Le 7 Mars. 1876, à l'Observatoire de Paris (Temp 9°c) $S = 0,0371$

A Berlin, j'ai fait usage d'une roue très-délicate, qui tourne sur des grandes roulettes afin de diminuer la friction. Elle appartient au cabinet de physique de l'Institut technologique de Berlin, et a été mise à ma disposition par la bonté de M. le Professeur Paalzow. Les lectures micrométriques furent faites alternativement sans le poids et avec le poids, en ne prenant chaque fois qu'une seule lecture, puisque le support du micromètre, étant en bois, subissait tout le temps un mouvement spontané. De même, je faisais toujours onze lectures dans la disposition du poids avec laquelle j'avais commencé une série, en n'en faisant que dix dans l'autre disposition, de sorte que le temps moyen fût le même dans les deux dispositions. La valeur de la révolution de la vis micrométrique a été mesurée séparément. Voici les résultats des différentes séries de mesures.

24 Mai. 1876	A. M.	S = 0^{mm},0340
Temp 13° C	P. M.	" ,0339
		" ,0340
		,0341
25 Mai 1876 Temp 13°		,0337
		,0336
En moyen		S = 0,0339 ± 0,0001

A Hoboken (près de New-York), j'ai obtenu par la bienveillance de M. le Professeur Morton, une roue excellente qui a été exécutée dans l'atelier du Stevens Institute of Technology. J'ai toujours fait une lecture sur chacune de deux lignes de l'échelle avant de changer la disposition du poids. Voici les résultats des séries séparées.

7 Mars 1877. Temp 15° C	S = 0^{mm}.0342
10 Mars 1877. Temp 12°	0.0332
	.0337
	.0343
	.0342
	.0339
	.0334
	.0342 } Ces deux séries doivent recevoir des poids doubles dans la réduction.
	.0342 }
En moyen	S = 0.0340 ± .0001

Voilà la valeur que je préfère.

Il s'en suit de la détermination de la position de l'axe de rotation ci-dessus décrite, que le bout antérieur de la langue est éloigné de cet axe par $\sqrt{1^m355 \times 1^m07} = 1^m20$. Et puisque le mouvement de ce bout avec le poids d'un Kilogramme est $S + 0^{mm}0008 = 0^{mm}0348$, il s'ensuit que la torsion du support par cette force est $\frac{0^{mm}0348}{1^m20} = 0{,}0000290 = 5''98$. Bien qu'il n'y ait rien de suspect dans ce résultat, j'ai fixé un miroir sur le bout de la langue, et à l'aide d'un télescope, j'ai mesuré la torsion par reflection d'une échelle, en la trouvant 6''. Cette méthode n'a naturellement pas l'exactitude de l'autre.

Pour arriver à une autre confirmation de la théorie, j'ai les observations suivantes sur la flexion produite par l'oscillation du pendule lui même dans ses deux positions, en me servant d'un microscope assez fort (c'est-a-dire d'un grossissement de 500 diamètres). L'échelle employée a été faite par M. Rogers de l'Observatoire de Harvard College. Elle est divisée avec une exactitude extrême de quatre millième en quatre millième ($\frac{1}{4000}$) d'un pouce. Elle était attachée à 70 millimètres en avant du centre du couteau, ce qui donne une correction à S de $+ 0^{mm}0019$. Si Φ est l'axe d'oscillation du pendule, l'amplitude double de la vibration de l'échelle doit être

$$2M\left(S + 0^{mm}0019\right)\frac{h}{l}\Phi$$

et $M = 6{\cdot}25$. C'est cette formule dont je me suis servi en calculant les quantités en bas.

Hoboken; le 20 Mars. 1877

A. Bout pesant du pendule en bas.

Arc du pendule		Amplitude de l'oscillation de l'échelle, en ses degrés. Observé	Calculé
2°	32'	2.2	2.2
2	30	2.1	2.1
2	24	2.0	2.1
2	22	1.9	2.0
2	20	1.9	2.0
2	19	1.95	2.0
1	43	1.5	1.5
0	47	0.8	0.7

B. Bout pesant en haut

2	39	1.0	1.0
2	34	0.9	1.0
2	29	0.9	0.9
2	25	0.9	0.9
2	22	0.8	0.9
2	14	0.8	0.8
2	12	0.8	0.8
2	06	0.7	0.8
2	04	0.75	0.8
1	57	0.75	0.7
1	51	0.75	0.7

En faisant ces observations, j'ai vu distinctement la petite vibration subsidiaire au bout de chaque oscillation provenant du deuxième terme de la formule.

Enfin j'ai fait osciller le pendule sur deux supports de flexibilité différente. L'un d'eux c'est le support Repsold, auquel ont rapport les mesures de la flexion données en haut. L'autre était fait en attachant la tête du support Repsold à un plancher épais, moyennant des boulons à écrous en airain passant par les trois trous pour les trois pieds. Ces trous sont d'une forme conique et les boulons s'y adaptent exactement. J'ai mis sur chaque boulon, entre la tête du support et le plancher une rondelle de plomb, de sorte qu'en serrant les écrous au dessous du plancher on fit solide l'attachement et on régla à la fois le niveau, en comprimant les rondelles. Le plancher, qui a une épaisseur de 5 centimètres, a été découpé pour faire place au pendule, et a été fortement serré entre une muraille de pierre et un grand pilier en briques. Il a été percé d'une pente où on pouvait faire entrer la roue de machine Atwood pour mesurer la flexion.

Voici les expériences sur la flexion de ce support.

Hoboken, 21 Mai. 1877.

Distance de l'échelle en avance du centre du couteau, en pouces	Distance de l'échelle au-dessous du plan de suspension, en pouc	Flexion en millimètres sous le poids d'un Kilo	Temp C	Observateur
+ 1.2	− 1.3	+ 0.0052	18.° 3	E. S.
+ 1.2	− 1.3	+ 0.0052	18.9	E. S.
+ 1.2	+ 39.5	− 0.0425	20.0	C. S. P.
+ 13.2	+ 39.5	− 0.0367	—	C. S. P.

Il résulte que pour cet appareil $S = 0^{mm}.0031$, et que la différence des S pour les deux supports est $0^{mm}\!.0309$. Maintenant je trouve $\frac{\mathfrak{D}^2 l}{g} = 1{\cdot}0125$ secondes sidérales, et $l = 1^{m.}$; ainsi nous concluons

$$\Delta\,\frac{\mathfrak{D}^2 l}{g} = -\left(\frac{\mathfrak{D}^2 l}{g}\right)\frac{MS}{l} = \frac{81}{80}\times 6{\cdot}25\times 0{\cdot\cdot}0309 = \cdot 000191$$

J'ai fait osciller le pendule trois fois sur le support le moins solide et une fois sur le plus solide, pour vérifier la théorie. J'ai observé dix passages du pendule par la verticale chaque 5 minutes, en me servant du relais que j'ai inventé à cet effet.

A. Oscillations sur le support Repsold.

Hoboken 1 Avril 1877

Bout pesant en haut

Nombre d'oscillations	Intervalle par chronomètre	Réduction à l'arc infiniment petit	Intervalle corrigé	Durée d'une oscillation
300	301ˢ,9652	− 0ˢ,0130	301ˢ,9522	1,006507
296	297,9408	− 0,0084	297,9324	528
298	299,9533	− 0,0060	299,9473	535
			En moyenne*	1,0065238

Bout pesant en bas

296	297,9094	− 0,0092	297,9002	1,006420
302	303,9376	− 0,0081	303,9295	389
296	297,9060	− 0,0066	297,8994	417
				1,0064067

Ainsi nous avons

$$T_1^2 = 1{,}0128544$$
$$T_2^2 = 1{,}0130902$$

* Quand on a une série d'intervalles consécutifs égaux, si n est le nombre des intervalles et i est le numéro d'un d'eux, on doit en prenant la moyenne donner à cet intervalle, le poid $i\,n - i(i-1)$.

Et puisque $h_1 : h_2 = 101 : 44$, nous trouvons

$$\frac{\vartheta^2 l}{g} = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2} = 1,013 - \frac{101 \times .0001456 + 44 \times .0000902}{56}$$

$$= 1,012672$$

Cette valeur doit recevoir des corrections à cause de la marche du chronomètre et à cause de la température. Le chronomètre retardait par jour de $0^s,86$, ce qui donne une correction à T^2 de $+0,000020$. La température pendant le temps où le bout pesant était en haut était $12°.7$ en moyen, et tandis que ce bout était en bas, était $12°.9$. Ainsi pour réduire à $13°C$, il faut appliquer une correction de

$$\frac{0.1 \times 101 - 0.3 \times 44}{57} = .0000186 = -.000001$$

D'où nous concluons

$$\frac{\vartheta^2 l}{g} \text{ à } 13°C = 1,012691$$

7 Avril 1877

Bout pesant en bas

Nombre d'oscillations	Intervalle par chronomètre	Réduction de l'arc infiniment petit	Intervalle corrigé	Durée d'une oscillation
290	291,^{s}8794	-0,0103	291,^{s}8691	1,006445
296	297,9131	-0,0086	297,9045	434
298	299,9241	-0,0073	299,9168	432
298	299,9241	-0,0060	299,9181	437
358	360,3090	-0,0058	360,3032	434
			En moyenne	1,0064357

Bout pesant en haut

288	289,9026	-0,0132	289,8894	1,006560
298	299,9648	-0,0092	299,9556	562
300	301,9760	-0,0067	301,9693	564
298	299,9564	-0,0051	299,9513	548
298	299,9591	-0,0037	299,9524	552
				1,0065578

Ainsi nous avons

$$T_1^2 = 1,0129128$$
$$T_2^2 = 1,0131586$$

$$\frac{\partial^2 l}{g} = 1,012723$$

Correction diurne $+0^s,44$ $\qquad +,000010$

Temp. 15°,8 en les deux positions $\qquad -,000052$

$\frac{\partial^2 l}{g}$ à 13°C $\qquad 1,012681$

8 Avril 1877.

Bout pesant en haut

Nombre d'oscillations	Intervalle par chronomètre	Réduction à l'arc infiniment petit	Intervalle corrigé	Durée d'une oscillation
298	299^s,9647	−0^s.0175	299^s.9472	1,006534
298	299,9549	−0.0111	299,9438	523
298	299,9539	−0.0080	299,9459	530
298	299,9484	−0.0055	299,9429	520
298	299,9481	−0.0039	299,9442	526
				1,0065261

Bout pesant en bas

298	299^s,9229	−0^s,0066	299^s.9163	1,006431
298	299,9213	−0,0058	299.9155	426
297	298.9125	−0,0049	298.9076	423
299	300,9236	−0,0042	300.9194	419
298	299.9171	−0,0035	299.9136	422
				1 0064246

$$T_1^2 = 1,0128905$$
$$T_2^2 = 1.0130948$$
$$\frac{\pi^2 l}{g} = 1.012733$$

Correction diurne −0^s.41 $\quad -,000009$

Temp. bout pesant en haut 13°,2 $\quad -,000016$

bout pesant en bas 13,5

$$\frac{\pi^2 l}{g} \text{ à } 13° = 1 \cdot 012708$$

Ainsi, les trois expériences sur le support Repsold donnent pour la valeur de $\frac{D^2 l}{g}$ à 13°C

1 Avril		1,012691
7	"	1,012681
8	"	1,012708
En moyenne		1,012693

B Oscillation sur le support le plus solide.

Hoboken, 14 Mai 1877

Bout pesant en bas

Instant moyen de dix passages	Intervalle de 298 oscillations	Réduction à l'arc infiniment petit	Intervalle Corrigé	Intervalle de 298 oscillations	Réduction à l'arc infiniment petit	Intervalle Corrigé
14h 06m 22s.4307						
07 22.8245						
11 22.3337	299s.9030	-.0132	299s.8898			
12 22.7213				299.8968	-.0126	299s.8842
16 22.2313	299.8976	-.0110	299.8866			
17 22.6209				299.8996	-.0106	299.8890
22 22.5145				299.8936	-.0087	299.8849
23 22.9017						
27 22.4055				299.8910	-.0074	299.8836
28 22.7949	299.8932	-.0072	299.8860			
33 22.6896	299.8947	-.0060	299.8887			

En moyenne $T_1 = 1.0063371$

Bout pesant en haut

Instant moyen de dix passages	Intervalles de 298 oscillations	Réduction de l'arc infiniment petit	Intervalles corrigés
$15^h\,53^m\;22^s.4041$			
58 22·3579	$299^s.9538$	−.0198	$299^s.9340$
16 03 22·3058	299·9479	−.0131	299·9348
08 22·2531	299·9473	−.0087	299·9386
13 22·2119	299·9588	−.0062	299·9526
18 22·1554	299·9435	−.0044	299·9391
23 22·1011	299·9457	−.0031	299·9426

En moyenne $T_2 = 1{\cdot}0065104$

Ainsi nous trouvons

$$T_1^2 = 1{\cdot}0127144$$

$$T_2^2 = 1{\cdot}0130632$$

$$\frac{\partial^2 l}{g} = 1{\cdot}012445$$

Correction diurne du chronomètre $+2^s.59$	$+\ {\cdot}000060$
Temp. bout pesant en bas $14°.18$ / " " en haut 15.00	$-\ {\cdot}000010$

$$\frac{\partial^2 l}{g} \text{ à } 13° \qquad 1{\cdot}012495$$

En comparant cette valeur avec celle que nous avons obtenue des résultats avec l'autre support, nous trouvons une différence de. 000198. La différence selon le calcul des expériences sur la flexion était. 000191, ce qui présente une concordance suffisante.

Acceptez, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments dévoués et reconnaissants

C. S. Peirce
Assistant, U. S. Coast Survey.