

QUATRIÈME SÉANCE

STUTTGART, le 2^{me} octobre 1877.

La séance est ouverte à 10 heures.

Sont présents : MM. *Adan, Baeyer, de Bauernfeind, Betocchi, Bruhns, Fearnley, Ferrero, Ganahl, Haffner, Hirsch, Hügel, Ibanez, Mayo, Nagel, d'Oppolzer, Perrier, Peters, Sadebeck, Schoder, Seidel, Siegfried, Zech*, délégués; et MM. *Sainte-Claire Deville, Peirce, de Silcher, de Schmidt, de Riecke, Gross, Dietrich*, et le professeur *Dubois-Reymond* de Tubingue, invités.

Présidence de M. *Zech*.

MM. *Bruhns* et *Hirsch* fonctionnent comme secrétaires.

M. le Président donne lecture de l'ordre du jour, qui porte :

1. Communications du Bureau;
2. Suite des rapports des délégués des différents pays;
3. Rapport sur l'article 7 du programme;
4. Rapport sur l'article 8 du programme.
5. Rapport sur les questions 5^a et 5^b du programme proposé par la Commission permanente.

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et adopté.

M. *Zech*, président, demande le rapport des délégués de la Suisse.

M. *Hirsch* expose les progrès qu'ont faits en Suisse les travaux astronomiques et de nivellement.*)

M. *Siegfried* rend compte des progrès des travaux de triangulation.**)

M. le Président remercie les délégués Suisses et donne la parole à M. *Ibanez*.

M. *Ibanez* parle des travaux exécutés en Espagne, et distribue aux membres de la Conférence trois cartes relatives à ces travaux : une carte d'ensemble des réseaux de triangulation, une des bases et une des nivellements.***)

M. le Président remercie M. *Ibanez* et donne la parole à M. *Schoder*, qui fait le rapport sur les travaux exécutés en Wurtemberg. Les travaux de nivellement sont presque achevés, et les déterminations astronomiques sur le Bussen seraient terminées si le mauvais temps ne les avait pas empêchées.†)

*) Voir au rapport général, Suisse.

**) Voir au rapport général, Suisse.

***) Voir au rapport général, Espagne.

†) Voir au rapport général, Wurtemberg.

P 00131

6-1877-3

Annexe I^b.

DE L'INFLUENCE
DE LA FLEXIBILITÉ DU TRÉPIED

SUR L'OSCILLATION DU PENDULE À RÉVERSION

PAR

Mr. PEIRCE du Coast Survey U. S. A.

Note communiquée par Mr. E. PLANTAMOUR.

Monsieur le Général Ibañez,
Président de la Commission permanente de l'Association
généraliste internationale.

Genève, le 27 août 1877.

Monsieur le Président,

Vous m'aviez fait l'honneur de me demander, dans le courant de l'hiver dernier, de présenter à la Conférence devant se réunir à Stuttgart au mois de septembre un rapport sur les résultats obtenus jusqu'à présent avec le pendule à réversion pour la détermination de la pesanteur. J'insistais dans ma réponse sur la difficulté de faire dans le moment actuel un rapport sur ce sujet, rapport qui me semblait être prématuré, et cela pour les deux raisons suivantes :

En premier lieu, le nombre des stations, dans lesquelles les résultats des expériences ont été publiés in extenso et avec des détails suffisants, est extrêmement restreint; l'on trouve, il est vrai, dans l'un des derniers rapports généraux une liste assez nombreuse de stations dans lesquelles les expériences ont été faites, d'autres où elles sont seulement projetées, mais les résultats ne sont pas encore connus.

En second lieu, même pour les stations pour lesquelles une publication complète a eu lieu, les résultats ne peuvent être regardés que comme provisoires, parce que les observateurs n'ont pas tenu compte d'une cause de perturbation, qui peut exercer une influence très-sensible sur la durée de l'oscillation et sur la longueur du pendule simple, savoir le mouvement ou la flexion des supports, qui accompagne les oscillations.

Dans un mémoire inséré dans le cahier d'octobre 1875 des Archives scienti-

fiques de la Bibliothèque universelle de Genève, M. le professeur Cellérier a étudié la théorie de ce mouvement des supports, et il a indiqué le moyen de reconnaître et de mesurer ce mouvement, en même temps que la formule de correction à l'aide de laquelle on pouvait en tenir compte. Il avait été amené à s'occuper de ce sujet à la suite des entretiens qu'il avait eus avec M. Ch. Peirce du *Coast-Survey*, lors du séjour que ce dernier avait fait à Genève, en vue de ses expériences sur le pendule.

Comme je savais que M. Peirce s'était non seulement occupé de son côté de l'étude théorique de la question, mais qu'il avait fait en divers lieux des expériences très-complètes sur les mouvements des supports, il me paraissait très important que les observateurs fussent nantis le plus tôt possible du résultat de ces travaux. Aussi vous avais-je proposé dans ma lettre d'écrire à M. Peirce, qui était retourné en Amérique, pour le prier de consigner les résultats de ses recherches théoriques et expérimentales dans un mémoire qui serait inséré dans les publications de l'Association géodésique internationale. Sur la réponse favorable que j'ai reçue, j'ai effectivement écrit à M. Peirce, qui a accueilli la demande avec la plus grande obligeance et s'est déclaré prêt à l'exécuter, aussitôt qu'il aurait terminé quelques expériences qu'il se proposait encore de faire, ainsi que les calculs et les réductions de ses observations.

J'ai reçu tout dernièrement de M. Peirce le mémoire ci-inclus rédigé en français, dont l'impression immédiate me paraît être éminemment désirable, afin que les commissaires et délégués réunis à Stuttgart le mois prochain l'aient sous les yeux dans la discussion qui aura lieu sur le pendule à réversion, et qu'ils aient même pu en prendre connaissance auparavant.

Veuillez, je vous prie, Monsieur le Président, agréer l'expression de ma haute considération.

E. Plantamour.

New York, 42, 7th Street, le 13 juillet 1877.

Cher Monsieur,

Le *Coast-Survey* des Etats-Unis m'ayant confié la direction des études relatives à la pesanteur, j'ai commandé à M. M. Repsold un pendule à réversion, qui devait être une copie de celui de l'Institut géodésique de Prusse. Mais les mécaniciens étaient alors si occupés de la construction des instruments nécessaires pour le passage de Vénus, que le pendule ne fut fini qu'au printemps de 1875. Je me rendis alors à Hambourg pour le recevoir; et de Hambourg je passai à Berlin, où je trouvai Son Exc. M. le général Baeyer peu satisfait des résultats obtenus avec un instrument semblable. Il se plaignait surtout de la flexibilité du pied, source d'erreur, qui, du reste, n'a assurément jamais échappé à l'attention des observateurs du pendule.* L'appareil du pendule, que j'avais

* On sait que Kater faisait usage du pendule renversé ou *noddy* de M. Hardy, pour s'assurer qu'il n'existait pas une oscillation de son support, isochrone à celle du pendule. Un savant a proposé

apporté d'Amérique, avait été presque abîmé dans le transport; aussi, me suis-je trouvé forcé de faire usage de l'instrument que la grande autorité du général Baeyer avait prononcé défectueux, malgré la perfection du travail qui fait honneur à l'atelier célèbre d'où il sort.

Voilà comment j'ai été amené à faire quelques expériences dans le but de mesurer et de tenir compte de ce défaut.

On peut s'imaginer un support si disloqué que le pendule, en oscillant de l'un côté à l'autre, jetterait la pièce, sur laquelle il repose, d'une position dans une autre, sans rencontrer, jusqu'aux points d'arrêt, d'autre résistance que celle de l'inertie et de la friction. Mais un tel jeu n'existe point dans les supports que je connais, ce que j'ai vérifié en les observant avec un fort microscope et en constatant qu'ils retournent toujours à la première position de repos après toute flexion, si petite ou si grande qu'elle soit.

Le mouvement auquel on a à faire est, en effet, une flexion oscillatoire d'un corps élastique. L'amplitude de cette oscillation est à peu près en raison d'un cinq millièmes à celle du couteau inférieur du pendule; c'est pourquoi on peut négliger le carré de cette fraction.

Le plan sur lequel le couteau repose est courbé, sans doute, par le mouvement du pendule; mais je néglige cet effet, en me bornant à considérer le mouvement de la partie au-dessous du milieu du couteau. Quand on applique à cette partie une force horizontale perpendiculaire au couteau, elle fait un mouvement de révolution autour d'un axe situé en arrière, et au-dessus du pied, à une distance d'un mètre environ. Or, on peut négliger la différence entre une révolution passant seulement par quelques secondes d'arc et une translation. Il y a encore une certaine variation minime dans la pression verticale du pendule sur le support; mais elle est évidemment loin de produire un effet sensible sur la durée d'une oscillation.

Si l'on désigne par

- m la masse d'une particule;
- r sa distance de la tranche du couteau;
- ω l'angle, dans la position de repos, entre la verticale et la perpendiculaire abaissée de la particule sur la tranche du couteau;
- M la masse du pendule;
- l la longueur du pendule simple faisant une oscillation dans le même temps que le pendule actuel;
- g l'accélération de la pesanteur;

dans l'*Encyclopædia Britannica* de faire usage de deux pendules à réversion, ayant la même forme, mais des poids différents, afin que l'on puisse tenir compte de l'erreur provenant de la flexion. Bessel, dans son grand mémoire sur la pesanteur à Königsberg, fait remarquer que cette cause exerce la même influence sur son pendule long que sur le court, et c'est pourquoi l'effet s'élimine. La construction de plusieurs supports de pendules, comme celui du capitaine Bassevi, montre une juste appréciation de cette difficulté.

- ε l'élasticité du pied;
 t le temps;
 ϕ l'angle, à l'instant t , entre la position du pendule et celle de repos;
 ς l'écartement horizontal, à l'instant t , du centre de la tranche du couteau de la position de repos;

la vitesse horizontale d'une particule sera

$$r \cos(\phi + \omega) \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\varsigma}{dt},$$

la vitesse verticale de la même particule sera

$$r \sin(\phi + \omega) \frac{d\phi}{dt};$$

la force vive de la particule sera

$$\frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + m r \cos(\phi + \omega) \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{d\varsigma}{dt} + \frac{1}{2} m \left(\frac{d\varsigma}{dt} \right)^2,$$

et la force vive du pendule sera

$$\frac{1}{2} M l \cdot h \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + M h \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{d\varsigma}{dt} + \frac{1}{2} M \left(\frac{d\varsigma}{dt} \right)^2.$$

Quant à la force vive du mouvement du pied, on peut la négliger, puisqu'elle se compose d'un petit moment d'inertie multiplié par le carré d'une vitesse très petite. La différentielle de l'énergie potentielle est

$$- M g h \sin \phi \cdot d\phi - \varepsilon \varsigma d\varsigma.$$

Il y a, en réalité, un troisième terme, qui dépend de la friction entre les molécules du pied. Mais je crois que l'on peut négliger ce terme, dont l'effet doit être peu considérable, et dont le coefficient est, en tout cas, inconnu.

On déduit, des expressions pour la force vive et l'énergie potentielle, les équations différentielles:

$$l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \cos \phi \frac{d^2 \varsigma}{dt^2} + \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{d\varsigma}{dt} = -g \sin \phi,$$

$$h \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \varsigma}{dt^2} = -\frac{\varepsilon}{M} \varsigma.$$

L'on peut négliger dans la première de ces équations le troisième terme, qui est d'un ordre inférieur et très petit par rapport aux deux autres, et remplacer $\sin \phi$ par ϕ , $\cos \phi$ par 1, en sorte qu'elles deviennent:

$$l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \varsigma}{dt^2} = -g \phi,$$

$$h \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \varsigma}{dt^2} = -\frac{\varepsilon}{M} \varsigma.$$

Pour résoudre ces équations, on multiplie la seconde par une quantité arbitraire x , et on l'ajoute à la première. On obtiendra:

$$d^2 \left\{ (l + hx) \phi + (1 + x) \varsigma \right\} = -\frac{g}{l + h \cdot x} \left\{ (l + hx) \phi + \frac{\varepsilon x (l + h \cdot x)}{Mg} \varsigma \right\}$$

Si l'on détermine la quantité arbitraire x par la relation

$$\frac{\varepsilon x (l + hx)}{Mg} = 1 + x,$$

et si l'on fait, en outre

$$(l + hx) \phi + (1 + x) \varsigma = \xi,$$

l'équation se réduit à la forme

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{g}{l + h \cdot x} \xi,$$

dont l'intégrale est

$$\xi = (l + hx) \phi + (1 + x) \varsigma = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + h \cdot x}} t + \eta \right),$$

A et η étant deux constantes arbitraires.

De la relation donnée plus haut, par laquelle la quantité arbitraire x a été introduite, on déduit

$$x = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon l - Mg}{\varepsilon h} \pm \frac{1}{h} \sqrt{4 \frac{Mgh}{\varepsilon l^2} + \left(1 - \frac{Mg}{\varepsilon l}\right)^2},$$

ou approximativement, en négligeant dans le développement du radical les termes de l'ordre de $\left(\frac{g}{\varepsilon l}\right)^2$,

$$x = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon l}{h} + \frac{1}{2} \frac{Mg}{\varepsilon h} \pm \left(\frac{1}{2} \frac{l}{h} - \frac{1}{2} \frac{Mg}{\varepsilon h} + \frac{Mg}{\varepsilon l} \right);$$

ainsi les deux valeurs de x seront:

$$x_1 = \frac{Mg}{\varepsilon l},$$

$$x_2 = -\frac{l}{h} + \frac{Mg}{\varepsilon h} - \frac{Mg}{\varepsilon l}.$$

En substituant ces deux valeurs dans l'équation intégrale, on aura les deux équations suivantes entre ϕ et ς :

$$\left(l + \frac{Mgh}{\varepsilon l} \right) \phi + \left(1 + \frac{Mg}{\varepsilon l} \right) \varsigma = A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{\varepsilon l}}} t + \eta_1 \right),$$

$$\left(\frac{Mg}{\varepsilon} - \frac{Mgh}{\varepsilon l} \right) \phi + \left(1 - \frac{l}{h} + \frac{Mg}{\varepsilon h} - \frac{Mg}{\varepsilon l} \right) \varsigma = A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{\varepsilon l}}} t + \eta_2 \right),$$

d'où l'on tire

$$\phi = -\frac{l-h}{h} A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{\varepsilon l}}} t + \eta_1 \right) - A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{\varepsilon l}{M(l-h)}} t + \eta_2 \right).$$

$$\varsigma = -\frac{Mg}{\varepsilon} \frac{l-h}{h} A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{\varepsilon l}}} t + \eta_1 \right) + l A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{\varepsilon l}{M(l-h)}} t + \eta_2 \right).$$

Il s'agit maintenant de déterminer les constantes arbitraires, ce qui a lieu par la considération suivante: Pour mettre le pendule en mouvement, on le pousse de côté, en appliquant le doigt auprès du couteau inférieur, puis on l'abandonne à lui-même.

Donc, lorsque t est nul, $\frac{d\phi}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ sont nuls aussi, en sorte que η_1 et η_2 sont égaux à 0. A cet instant, auquel $t=0$, la force horizontale sur le couteau est, en désignant par ϕ_0 et s_0 les valeurs initiales de ϕ et de s ,

$$\frac{Mgh}{l} \phi_0 = \epsilon s_0.$$

La première forme de l'équation intégrale de la page précédente donne, pour les deux valeurs de x correspondant à $t=0$,

$$\begin{aligned} (l+h_1 x_1) \phi_0 + (1+x_1) s_0 &= A_1 \\ (l+h_2 x_2) \phi_0 + (1+x_2) s_0 &= A_2. \end{aligned}$$

En éliminant ϕ_0 et s_0 entre ces trois équations on obtient

$$\frac{Mgh}{l} (1+x_2) A_1 - \frac{Mgh}{l} (1+x_1) A_2 = -\epsilon (l+h_2 x_2) A_1 + \epsilon (l+h_1 x_1) A_2,$$

d'où, en substituant pour x_1 et pour x_2 les valeurs trouvées en bas de la page précédente, on déduit

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M^2 g^2 (l-h)}{\epsilon^2 l^2 + M^2 g^2 h + 2 M g h \cdot l}$$

ou approximativement

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M^2 g^2 (l-h)}{\epsilon^2 l^2}.$$

Ainsi, en posant $\Lambda = (l-h) A_1$, on aura

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\Lambda}{h} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{\epsilon l}}} \cdot t \right) - \frac{M^2 g^2}{\epsilon^2 l^2} \Lambda \cos \left(\sqrt{\frac{\epsilon l}{M(l-h)}} \cdot t \right) \\ s &= -\frac{Mg}{\epsilon l} \Lambda \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{\epsilon l}}} \cdot t \right) + \frac{M^2 g^2}{\epsilon^2 l^2} \Lambda \cos \left(\sqrt{\frac{\epsilon l}{M(l-h)}} \cdot t \right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme dans l'expression de ϕ n'étant que la $\frac{1}{800,000}$ du premier, on peut le négliger.

La quantité ϵ peut être déterminée expérimentalement en mesurant la déflexion Σ du trépied, produite par une force horizontale égale à l'unité de poids; ce qui s'écrit

$$\epsilon = \frac{g}{\Sigma}.$$

Ou substituant cette valeur de ϵ , on conclut enfin:

$$\phi = \frac{\Lambda}{h} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l + M \Sigma \frac{h}{l}}} \cdot t \right).$$

Ainsi, l'effet du mouvement du support sur le pendule est de lui donner une longueur virtuelle plus grande que sa longueur réelle d'une quantité égale à $M \Sigma \frac{h}{l}$.

Désignons la durée d'une oscillation par T , et par Δl , ΔT , etc., les corrections provenant de la flexion sur l , T , etc., en sorte que, d'après ce qui précède,

$$\Delta l = M \Sigma \frac{h}{l},$$

et comme $T^2 = \frac{\pi^2 l}{g}$ (π rapport de la circonférence au diamètre),

$$\Delta(T^2) = \frac{\pi^2}{g} M \Sigma \frac{h}{l}.$$

Si l'on distingue par des indices ajoutés à T et à h la durée de l'oscillation et la distance du centre de gravité au point de suspension correspondant aux deux positions du pendule à réversion, la formule pour la réduction des résultats obtenus avec un pareil instrument est

$$\frac{\pi^2 l}{g} = \frac{T_1 h_1 - T_2 h_2}{h_1 - h_2},$$

d'où

$$\Delta \left(\frac{\pi^2 l}{g} \right) = \frac{\pi^2}{g} M \Sigma \frac{h_1 - h_2}{l(h_1 - h_2)} = \frac{\pi^2}{g} M \Sigma,$$

ou bien

$$\Delta l = M \Sigma,$$

ou bien encore, en posant λ pour la longueur du pendule à secondes,

$$\Delta \lambda = M \Sigma \frac{\lambda}{l}.$$

Pour déterminer la quantité de la flexion, je fixe dans la rainure du plan de suspension au-dessous du milieu du couteau, et perpendiculairement à celui-ci, un cordon qui passe dans une direction horizontale sur la poulie d'une machine Atwood (convenablement disposée dans ce but); ce cordon peut être tendu par un poids d'un kilogramme. A l'extrémité du plan de suspension, ou même sur un bras en bois qui y est fixé, je colle une échelle micrométrique en verre, tournée en tel sens qu'on puisse mesurer la flexion à l'aide d'un micromètre convenablement placé. Celui-ci repose sur un support particulier et indépendant, dont le montant se compose d'un tuyau à gaz d'un diamètre d'environ dix centimètres.

Voici maintenant les expériences que j'ai faites pour déterminer la position de l'axe fixe, autour de laquelle tourne le couteau:

A. Expériences faites au niveau du plan de suspension.

Hoboken, 10 mars 1877. Température 13° C.

DISTANCE DE L'ÉCHELLE à l'extrémité du plan + en avant, — en arrière	FLEXION EN RÉVOLUTIONS de la vis micrométrique	
	observée	calculée
— 0.496	+ 0.211	+ 0.209
+ 0.053	+ 0.356	+ 0.358
+ 0.318	+ 0.436	+ 0.431

Les quantités calculées supposent que l'axe coupe le niveau du plan de suspension à une distance de 1^m355 derrière l'extrémité antérieure du plan de suspension.

B. Expériences faites dans la verticale du bout antérieur.

Hoboken, 12 mars 1877. Température 14° C. Observateur le sous-assistant SMITH.

POSITION DE L'ÉCHELLE relativement au niveau de la suspension + au-dessous, — au-dessus	FLEXION EN RÉVOLUTIONS de la vis micrométrique.	
	observée	calculée
— 0 ^m 44	+ 0.196	+ 0.196
0.000	+ 0.340	+ 0.332
+ 0.395	+ 0.446	+ 0.454

Les quantités calculées supposent que l'axe coupe la verticale du bout antérieur du plan de suspension à une distance de 1^m07 au-dessus du niveau de ce plan. Il n'y a rien de surprenant à ce que l'axe instantané soit au-dessus du plan de suspension. Supposons, en effet, que la flexion demeurât exclusivement dans les trois pieds du support. En ce cas là, le mouvement du bout supérieur de chaque pied serait perpendiculaire au sens général du pied, et, en même temps, perpendiculaire au rayon du cercle de révolution, de façon à ce que le pied se dirigerait directement vers l'axe fixe. L'axe est sans doute en arrière du support à cause de la flexion du plan lui-même.

J'ai fait à Genève, à Paris, à Berlin et à New-York des expériences pour déterminer la valeur numérique de Σ . L'expérience de Genève, faite le 13 septembre 1875, n'était qu'un essai. Mais j'avais une bonne poulie, que j'avais empruntée à l'atelier de la Société Genevoise pour la construction d'instruments de physique, et j'ai obtenu comme valeur approximative

$$\Sigma = 0^{\text{mm}}034.$$

La poulie, dont je me suis servi à Paris, avait un frottement très considérable, circonstance à laquelle on peut attribuer le fait, que les nombres trouvés s'écartent sensiblement de ceux que j'ai obtenus à l'aide de meilleurs appareils. Voici les chiffres :

Le 18 janvier 1876, chez M. M. Brunner (Température 1° C.) $\Sigma = 0^{\text{mm}}0363$;

Le 7 mars 1876, à l'observatoire de Paris (Température 9° C.) $\Sigma = 0.0371$.

À Berlin, j'ai fait usage d'une poulie très délicate, qui tourne sur de grands galets, afin de diminuer le frottement. Elle appartient au cabinet de physique de l'Institut

technologique de Berlin, et a été mise à ma disposition par l'obligeance de M. le professeur Paalzow. Les lectures micrométriques furent faites alternativement sans le poids et avec le poids, en n'exécutant chaque fois qu'une seule lecture, afin d'éviter une cause d'erreur pouvant tenir au mouvement du support du micromètre, ce support étant en bois. Dans les lectures faites alternativement sans le poids et avec le poids, je finissais par la disposition par laquelle j'avais commencé (11 pour l'une et 10 pour l'autre), en sorte que l'instant moyen des observations fût le même dans les deux positions. La valeur d'une révolution de la vis micrométrique a été mesurée séparément. Voici les résultats des différentes séries de mesures :

24 mai 1876 A.M. $\Sigma = 0^{\text{mm}}0340$
Temp. 13° C. P.M. $\Sigma = 0.0339$

0.0340
0.0341
25 mai 1876. Temp. 13° 0.0337
0.0336

Moyenne . . $\Sigma = 0.0339 \pm 0^{\text{mm}}0001$

À Hoboken (près de New-York), j'ai obtenu, par la bienveillance de M. le professeur Morton, une poulie excellente qui a été exécutée dans l'atelier du Stevens Institute of technology. J'ai toujours fait une lecture sur chacun des deux traits de l'échelle avant de changer la disposition du poids. Voici les résultats des séries séparées.

7 mars 1877. Temp. 15° C. $\Sigma = 0^{\text{mm}}0342$
10 mars 1877. Temp. 12° 0.0332

0.0337

0.0343

0.0342

0.0339

0.0334

0.0342

0.0342

Ces deux séries ont été à un poids double dans la réduction.

En moyenne . . $\Sigma = 0.0340 \pm 0^{\text{mm}}0001$

Dans toutes ces expériences faites dans différentes positions de l'échelle, la flexion obtenue a été ramenée à celle qui correspondait au milieu du couteau, et c'est cette dernière qui est désignée par Σ .

C'est à cette dernière valeur que je donne la préférence.

Il résulte des expériences décrites à la page 11, faites en vue de la détermination de la position de l'axe de rotation, que l'extrémité antérieure du plan de suspension est éloignée de cet axe de $\sqrt{1^{\text{m}}355 \times 1^{\text{m}}07} = 1^{\text{m}}20$. Et puisque le mouvement de ce bout avec le poids d'un kilogramme est $\Sigma + 0^{\text{mm}}000^{\circ} = 0^{\text{mm}}0348$, la correction + 0.0008

provenant de la réduction du centre du couteau à l'extrémité antérieure, il s'ensuit que la torsion du support par cette force est $\frac{0^{\text{m}}0848}{1^{\text{m}}20} = 0.0000290 = 5.98$. Bien qu'il n'y ait rien de suspect dans ce résultat, j'ai voulu le contrôler par une expérience directe: j'ai fixé un miroir à l'extrémité du plan de suspension, et, à l'aide d'une lunette, j'ai mesuré la torsion par la réflexion d'une échelle, et je l'ai trouvée de 6". Cette méthode n'a naturellement pas l'exactitude de l'autre.

Pour arriver à une autre confirmation de la théorie, j'ai fait les observations suivantes sur la flexion produite par l'oscillation du pendule lui-même dans ses deux positions, en me servant pour cela d'un microscope assez fort (c'est-à-dire d'un grossissement de 500 diamètres). L'échelle employée a été faite par M. Rogers de l'Observatoire de Harvard Collège. Elle est divisée avec une exactitude extrême, l'intervalle entre deux traits étant de $(\frac{1}{4000})$ d'un pouce anglais. Elle était fixée à 70 millimètres en avant du centre du couteau, ce qui donne une correction à Σ de $+0^{\text{m}}0019$. Si Φ est l'amplitude de l'oscillation de part et d'autre de la verticale, l'amplitude double de la vibration de l'échelle doit être

$$2M(\Sigma + 0^{\text{m}}0019) \frac{h}{l} \Phi,$$

dans laquelle $M = 6.25$ et $\frac{h}{l} = \frac{17}{56}$ ou $\frac{39}{56}$, selon que le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché ou le plus éloigné du centre de gravité. C'est la formule dont je me suis servi pour calculer les quantités données ci-contre.

Hoboken, le 20 mars 1877.

A. Le pendule étant suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité.

Φ	AMPLITUDE du mouvement de l'échelle $1^{\text{p}} = \frac{1}{4000}$	
	observée	calculée
	p.	p.
2° 32'	2.2	2.2
2 30	2.1	2.1
2 24	2.0	2.1
2 22	1.9	2.0
2 20	1.9	2.0
2 19	1.95	2.0
1 43	1.5	1.5
0 47	0.8	0.7

B. Le pendule étant suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité.

Φ	AMPLITUDE du mouvement de l'échelle $1^{\text{p}} = \frac{1}{4000}$	
	observée	calculée
	p.	p.
2 39	1.0	1.0
2 34	0.9	1.0
2 29	0.9	0.9
2 25	0.9	0.9
2 22	0.8	0.9
2 14	0.8	0.8
2 12	0.8	0.8
2 06	0.7	0.8
2 04	0.75	0.8
1 57	0.75	0.7
1 51	0.75	0.7

En faisant ces observations, j'ai vu distinctement la petite vibration subsidiaire au bout de chaque oscillation provenant du deuxième terme de la formule.

Enfin, j'ai fait osciller le pendule sur deux supports de flexibilité différente. L'un d'eux, c'est le trépied métallique de Repsold, auquel se rapportent les mesures de la flexion données plus haut. L'autre était obtenu en fixant la partie supérieure du trépied Repsold à un plateau épais en bois, au moyen de boulons à écrous en bronze passant par les trois trous servant au passage des pieds. Ces trous sont d'une forme conique, et les boulons s'y adaptent exactement. J'ai mis sur chaque boulon, entre la tête du support et le plateau, une rondelle de plomb, de sorte qu'en serrant les écrous au-dessous du plateau et en comprimant les rondelles, l'on obtient une grande fixité, en même temps que la position horizontale. Le plateau, qui a une épaisseur de cinq centimètres, a été découpé pour faire place au pendule, et il a été introduit par force entre une muraille de pierre et un grand pilier en briques. Il a été percé d'une fente, par laquelle on pouvait faire pénétrer la poulie de la machine Atwood pour mesurer la flexion.

Voici les expériences sur la flexion de ce support :

Hoboken, 21 mai 1877.

DISTANCE DE L'ÉCHELLE en avant +, en arrière — du centre du couteau en pouces anglais	DISTANCE DE L'ÉCHELLE au plan de suspension en pouces anglais + au-dessus, — au-dessous	FLEXION en millimètres sous le poids d'un kilogr.	Température C.	OBSERVATEUR
+ 1.2	— 1.3	+ 0.0052	18.3	E. S.
+ 1.2	— 1.3	+ 0.0052	18.9	E. S.
+ 1.2	+ 39.5	— 0.0425	20.0	C. S. P.
+ 13.2	+ 39.5	— 0.0367	—	C. S. P.

Il résulte que pour cet appareil $\Sigma' = 0.0031$, et que la différence entre les valeurs de Σ pour les deux supports est 0.0309. Maintenant je trouve $\frac{\pi^2 l}{g} = 1.0125$ secondes sidérales, et $l = 1^m$; ainsi nous concluons que la différence de $\frac{\pi^2 l}{g}$, suivant que l'on fait osciller le pendule sur l'un ou sur l'autre des supports, doit être égale à

$$\frac{MS}{l} \frac{\pi^2 l}{g} \frac{M(\Sigma - \Sigma')}{l} = \frac{81}{80} \times 6.25 \times 0.0309 = 0.000191.$$

J'ai fait osciller le pendule trois fois sur le support le moins solide et une fois sur le plus solide, pour vérifier la théorie. J'ai observé dix passages consécutifs du pendule par la verticale, au bout d'intervalles de cinq minutes, en me servant du relais que j'ai inventé à cet effet.

A. Oscillations sur le trépied métallique Repsold.

Hoboken, 1^{er} avril 1877.

Pendule suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité.

NOMBRE d'oscillations	INTERVALLE par chronomètre	RÉDUCTION à l'arc infinitement petit	INTERVALLE corrigé	DURÉE d'une oscillation
300	301.9652	— 0.0130	301.9522	1.006507
296	297.9408	— 0.0084	297.9324	528
298	299.9533	— 0.0060	299.9473	535
En moyenne *)				1.0065238

Pendule suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité.

296	297.9094	— 0.0092	297.9002	1.006420
302	303.9376	— 0.0081	303.9295	382
296	297.9060	— 0.0066	297.8994	417
				1.0064067

Ainsi nous avons :

$$T_1^2 = 1.0128544$$

$$T_2^2 = 1.0130902.$$

Et puisque $h_1 : h_2 = 101 : 44$, nous obtenons

$$\frac{\pi^2 l}{g} = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2} = 1.013 \left(1 - \frac{101 \times 0.0001456 + 44 \times 0.0000902}{57} \right) = 1.012672.$$

*) Quand on a une série d'intervalles consécutifs égaux, si n est le nombre des intervalles et i est le rang de l'un d'entre eux, on doit, en prenant la moyenne, donner à cet intervalle le poids $n - i + 1$.

Cette valeur doit recevoir des corrections à cause de la marche du chronomètre et à cause de la température. Le chronomètre retardait par jour de 0^s.86, ce qui donne une correction à T^2 de +0.000020. La température, pendant le temps où la masse la plus lourde était en haut, était de 12^o.7 en moyenne, et de 12^o.9 lorsque cette masse était en bas. Ainsi, pour réduire à 13^o C., il faut appliquer une correction de

$$\frac{0.1 \times 101 - 0.3 \times 44}{57} = 0.0000186 = -0.000001,$$

d'où nous concluons :

$$\frac{\pi^2 l}{g} \text{ à } 13^\circ \text{ C} = 1.012691.$$

7 avril 1877.

Pendule suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité.

NOMBRE d'oscillations	INTERVALLE par chronomètre	RÉDUCTION à l'arc infinitement petit	INTERVALLE corrigé	DURÉE d'une oscillation
290	291.8794	— 0.0103	291.8691	1.006445
296	297.9131	— 0.0086	297.9045	434
298	299.9241	— 0.0073	299.9168	432
298	299.9241	— 0.0060	299.9181	437
358	360.3090	— 0.0058	360.3032	434
En moyenne				1.0064357

Pendule suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité.

288	289.9026	— 0.0132	289.8894	1.006560
298	299.9648	— 0.0092	299.9556	562
300	301.9760	— 0.0067	301.9693	564
298	299.9564	— 0.0051	299.9513	548
298	299.9591	— 0.0037	299.9524	552
				1.0065578

Ainsi nous avons

$$T^2_1 = 1.0129128$$

$$T^2_2 = 1.0131586$$

$$\frac{\pi^2 l}{g} = 1.012723$$

$$\text{Correction diurne} + 0.44 \dots \dots \dots + 0.000010$$

$$\text{Temp. } 15.98 \text{ dans les deux positions} \dots \dots - 0.000052$$

$$\frac{\pi^2 l}{g} \text{ à } 13^\circ \text{ C.} = 1.012681$$

8 avril 1877.

Pendule suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité.

NOMBRE d'oscillations	INTERVALLE par chronomètre	RÉDUCTION à l'arc infinitement petit	INTERVALLE corrigé	DURÉE d'une oscillation
298	299.9647	— 0.0175	299.9472	1.006534
298	299.9549	— 0.0111	299.9438	523
298	299.9539	— 0.0080	299.9459	530
298	299.9484	— 0.0055	299.9429	520
298	299.9481	— 0.0039	299.9442	526
En moyenne				1.0065261

Pendule suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité.

298	299.9229	— 0.0066	299.9163	1.006431
298	299.9213	— 0.0058	299.9155	426
297	298.9125	— 0.0049	298.9076	423
299	300.9236	— 0.0042	300.9194	419
298	299.9174	— 0.0035	299.9136	422
				1.0064246

$$T_1^2 = 1.0128905$$

$$T_2^2 = 1.0130948$$

$$\frac{\pi^2 l}{g} = 1.012733$$

$$\text{Correction diurne} - 0.41 \dots - 0.000009$$

$$\text{Temp. bout pesant en haut } 13.2 \dots - 0.000016$$

$$\text{,, bout pesant en bas } 13.5 \dots - 0.000016$$

$$\frac{\pi^2 l}{g} \text{ à } 13^\circ = 1.012708$$

Ainsi, les trois expériences sur le trépied Repsold donnent, pour la valeur de $\frac{\pi^2 l}{g}$ à 13° C.,

$$1 \text{ avril} \dots 1.012691$$

$$7 \text{ ,,} \dots 1.012681$$

$$8 \text{ ,,} \dots 1.012708$$

$$\text{En moyenne } 1.012693$$

B. Expériences faites sur le support le plus solide.

Hoboken, 14 mai 1877.

Pendule suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité.

INSTANT MOYEN de dix passages	INTERVALLE de 298 oscillations	RÉDUCTION à l'arc infiniment petit	INTERVALLE corrigé	RÉDUCTION à l'arc infinim. petit	INTERVALLE de 298 oscilla- tions	INTERVALLE corrigé
14 ^h 6 ^m 22.4307						
7 22.8245						
11 22.3337	299.9030	-0.0132	299.8898	299.8968	-0.0126	299.8842
12 22.7213						
16 22.2313	299.8976	-0.0110	299.8866	299.8996	-0.0106	299.8890
17 22.6209				299.8936	-0.0087	299.8849
22 22.5145						
23 22.9017				299.8910	-0.0074	299.8836
27 22.4055						
28 22.7949	299.8932	-0.0072	299.8860			
33 22.6896	299.8947	-0.0060	299.8887			

$$\text{En moyenne } T_1 = 1.0063371.$$

Pendule suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité.

INSTANT MOYEN de dix passages	INTERVALLES de 298 oscillations	RÉDUCTION à l'arc infiniment petit	INTERVALLES CORRIGÉS
15 ^h 53 ^m 22.4041			
58 22.3579	299.9538	-0.0198	299.9340
16 3 22.3058	299.9479	-0.0131	299.9348
8 22.2531	299.9473	-0.0087	299.9386
13 22.2119	299.9588	-0.0062	299.9526
18 22.1554	299.9435	-0.0044	299.9391
23 22.1011	299.9457	-0.0031	299.9426

$$\text{En moyenne } T_2 = 1.0065104.$$

Ainsi nous trouvons :

$$T_1^2 = 1.0127144$$

$$T_2^2 = 1.0130632$$

$$\frac{\pi^2 l}{g} = 1.012445$$

$$\text{Correction diurne du chronomètre } + 2.59 \dots + 0.000060$$

$$\text{Temp. bout pesant en bas } 14.18 \dots - 0.000010$$

$$\text{,, bout pesant en haut } 15.00 \dots - 0.000010$$

$$\frac{\pi^2 l}{g} \text{ à } 13^\circ = 1.012495$$

En comparant cette valeur avec celle que nous avons obtenue avec l'autre support, nous trouvons une différence de 0.000198. La différence selon le calcul des expériences sur la flexion aurait dû être de 0.000191, ce qui présente une concordance suffisante.

Acceptez, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments dévoués et reconnaissants.

C. S. Peirce
Assistant U. S. Coast Survey.

Erste Note zu Herrn Peirce's Mittheilung

„De l'influence du trépied sur l'oscillation du pendule à réversion“

von Th. von Oppolzer.

Mit Beibehaltung der Bezeichnungen, die Herr Peirce gewählt hat, erscheint das Problem auf die Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} = -g\psi \quad (1),$$

$$h \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} = -\frac{\epsilon}{M} \quad (2),$$

zurückgeführt. Die Integration dieser Gleichungen kann nun in wesentlich einfacherer Form, als dies in der angezogenen Abhandlung geschehen ist, vorgenommen werden, und da dadurch das allgemeine Verständniss dieser so wichtigen Abhandlung mir in Etwas erleichtert erscheint, so meine ich die folgende Beweisführung nicht unterdrücken zu sollen.

Es wird ϵ im Allgemeinen eine Funktion von ϕ sein. Man wird daher der für ein unbewegliches Stativ und für kleine Amplituden geltenden bekannten Differentialgleichung für die Bewegung eines Pendels

$$L \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -g\phi \quad (3)$$

durch Variation der Constante L in $[l + f(\phi)]$ für die Beweglichkeit des Stativs genügen können, wo $f(\phi)$ eine vorerst nicht näher bekannte Funktion darstellt; man wird also haben

$$[l + f(\phi)] \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -g\phi \quad (4).$$

Substituirt man den aus dieser Gleichung für $l \frac{d^2 \phi}{dt^2}$ resultirenden Werth in die Gleichung (1) ein, so wird man sofort erhalten

$$f(\phi) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \quad (5).$$

Die Integration wird ergeben

$$F(\phi) = \epsilon \quad (6),$$

wobei $F(\phi)$ eine vorerst wieder völlig unbestimmte Funktion sein wird.

Substituirt man diese Werthe für ϵ und $\frac{d^2 \epsilon}{dt^2}$ aus den Gleichungen (5) und (6) in die Gleichung (2), und ersetzt ϵ gemäss der Peirce'schen Definition, dass

$$\epsilon = \frac{g}{S},$$

wobei S die durch den horizontalen Zug der Gewichtseinheit bewirkte Verschiebung des Schneidenlagers vorstellt, so folgt unmittelbar

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} [l + f(\phi)] = -\frac{g}{SM} F(\phi);$$

ersetzt man überdies $\frac{d^2 \phi}{dt^2}$ in dieser letzten Gleichung durch den aus (4) resultirenden Werth, so erhält man nach einer einfachen Umsetzung

$$\frac{h + f(\phi)}{l + f(\phi)} SM = \frac{F(\phi)}{\phi} \quad (7).$$

Bedenkt man die solide Konstruktion des Dreifusses, so wird man sofort zugeben, dass $f(\phi)$ und S nothwendig kleine Grössen sein müssen, vernachlässigt man dabei, wie dies Herr Peirce ebenfalls thut, die Producte (also die zweiten Dimensionen) derselben, so verwandelt sich (7) in

$$\frac{h SM}{l} = \frac{F(\phi)}{\phi} \quad (8).$$

Diese Gleichung lehrt, da links vom Gleichheitszeichen eine Constante steht, dass die unbekannte Funktion $F(\phi)$ nothwendig von der Form

$$F(\phi) = \gamma\phi \quad (9)$$

sein muss, da sonst der Relation (8) für die verschiedenen Werthe von ϕ nicht genügt werden könnte.

Hiermit nimmt die Gleichung (6) die Gestalt ^S an:

$$s = \gamma \phi \quad (10),$$

und die zweimalige Differentiation ergibt

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \gamma \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (11),$$

woraus durch Substitution in die Gleichung (1) resultirt

$$(l + \gamma) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -g\phi \quad (12).$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der Differentialgleichung (3), so resultirt sofort das von Herrn Peirce gefundene wichtige Resultat, dass die unmittelbar beobachtete Pendellänge um γ zu verbessern ist, nun ergibt sich aber aus der Verbindung der Gleichungen (8) und (9) das Peirce'sche Resultat

$$\gamma = \frac{\lambda SM}{l}.$$

Annexe I^d.

Zweite Note

von Th. von Oppolzer.

Was die Bestimmung des Antheiles der Beweglichkeit des Stativs ^Q anlangt, so habe ich zur Bestimmung dieses Fehlers das folgende Verfahren erdacht und theilweise schon eingeschlagen, welches mir die Bestimmung noch anderer Fehlerquellen erlaubt, zu denen ich insbesondere rechne: Abweichung der Schneidenkante von einer geraden Linie, Deformation derselben auf dem Lager durch den Druck, etc., etc., und welchen Apparat ich schon in der Pariser Conferenz seinem Principe nach kurz erwähnt habe.

Ein kleines Stäbchen von etwa 3^{cm}. Länge aus Messing wird in die Nute des Lagers der Schneiden eingeschoben und durch schwache Spiralfedern nahe seiner Mitte leicht gegen die Schneide an eine Stelle angedrückt, an der die Messung mit Hilfe des Mikroskopes des Comparators gemacht wird. Das Stäbchen liegt also dem Wesen nach, wenn es richtig adjustirt ist, horizontal, und steht vertikal auf der Schneidenkante. Jede laterale Bewegung der Schneidenkante wird demnach das genannte Stäbchen im horizontalen Sinne verschieben. Die eine Endfläche des Stäbchens steht nun mit einem Fühlhebel in Verbindung, das andere mit einer Spiralfeder, um das Gleichgewicht mit der spannenden Feder des Fühlhebels herzustellen; man wird jetzt leicht einsehen können, dass der Fühlhebel die Grösse der lateralen Verschiebung der Schneide wird bestimmen lassen, und hiermit wird die Relation zwischen der Schneidenkante und der thatsächlichen Drehungsachse ermittelt werden können, eine Relation, die gemeiniglich bisher übergangen wurde.

Der Drehungsachse des Fühlhebels habe ich eine solche Einrichtung gegeben, dass ich dieselbe vorerst mit dem Lager der Schneiden in feste Verbindung bringe; ich bestimme dadurch die Fehler, die von der Form der Schneiden abhängen, die ich mit σ bezeichnen will. Befestige ich aber nun die Drehungsachse am Pfeiler, auf welchem

der ganze Apparat aufgestellt ist, und nenne ich die durch die Elasticität des Dreifusses bewirkte laterale Verschiebung des Lagers τ , so erhalte ich durch dieses Arrangement die Bestimmung

$$\sigma + \tau.$$

Endlich lässt sich die Drehungsachse mit einem Fixpunkte ausserhalb des Pfeilers verbinden; nenne ich die durch die Beweglichkeit des Pfeilers bedingte Verschiebung der Schneidenkante ν , so habe ich nun erhalten

$$\sigma + \tau + \nu.$$

Es ist klar, dass man durch dieses Verfahren, welches einer grossen Genauigkeit fähig ist, jede dieser Fehlerursachen getrennt bestimmen kann. Die letzteren zwei Ursachen ($\tau + \nu$) werden nur eine im gegebenen Falle konstante Korrektur der gefundenen Pendellänge bedingen, die erste Ursache (σ) wird wahrscheinlich sich ähnlich verhalten, doch kann darüber nur das Experiment entscheiden; vom theoretischen Standpunkte ist es also leicht denkbar, dass in diesem letzteren Falle die Korrektur der Pendellänge eine Funktion der Amplitude ist; sollte der letztere Fall sich durch das Experiment als thatsächlich erweisen, so würde man die Pendelformel dahin zu berichtigen haben, dass eine Variation der Pendellänge während einer Schwingung eintritt; für den Fall, dass die Schwingungsbögen selbst nur mässige Grössen nicht überschreiten, und dass die Variation der Pendellänge als kleine Grössen aufgefasst werden können, deren zweite und höhere Dimensionen man übergehen darf, habe ich eine einfache Lösung gefunden. Die nöthigen Korrekturen lassen sich dann ohne Schwierigkeit mit der Reduktion auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen vereinigen. Man darf aber aus dem Umstande, dass bei meinem Apparate in der That die Schwingungszeit nach Abzug der Reduktion auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen einiger Maassen eine Funktion der Amplitude ist, vorerst nicht ableiten, dass diese Fehlerquelle in der Schneidenform in der That vorhanden ist, denn diese kleine Differenz erklärt sich hauptsächlich aus dem Luftwiderstande, den theoretisch in allen Theilen zu verfolgen mir nicht möglich erscheint. Desshalb habe ich Massnahmen getroffen, dass durch Bestimmungen im luftverdünnten Raume die nöthigen Reduktionselemente zu beschaffen sind; doch ist diese Bestimmung nicht gerade unumgänglich nöthig, denn meine theoretischen Untersuchungen haben mich gelehrt, und hiermit stimmen auch die schönen Resultate die Cellérier erhielt, dass bei symmetrischen Reversionspendeln, wenn die Beobachtungen in nahe gleichen Amplituden in den beiden Hauptlagen des Pendels gemacht sind, dieser Einfluss verschwindet.

RECHERCHES EXPERIMENTALES

sur le

MOUVEMENT SIMULTANÉ D'UN PENDULE

ET

DE SES SUPPORTS

PAR

E. PLANTAMOUR, professeur



RECHERCHES EXPERIMENTALES

SUR LE

MOUVEMENT SIMULTANÉ D'UN PENDULE

DE SES SUPPORTS

Dans le pendule à réversion, suivant la construction de Repsold, le plan de suspension est fixé à un plateau assez massif en laiton, qui est porté par trois tubes creux, en laiton également, deux des pieds étant sur une ligne parallèle au plan d'oscillation, et le troisième dans une direction perpendiculaire à cette ligne. Lorsque le pendule oscille, la composante horizontale de son poids peut produire une flexion alternativement sur l'un, ou sur l'autre, des deux tubes, s'ils ne sont pas absolument rigides, et donner lieu ainsi à un déplacement du plan de suspension, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé, suivant que le pendule est d'un côté, ou de l'autre, de la verticale.

MM. Cellérier et Peirce ont étudié, au point de vue théorique, l'influence que pouvait avoir ce déplacement oscillatoire du plan de suspension sur le mouvement du pendule lui-même, et ils ont développé les formules à l'aide desquelles on pouvait éliminer cette cause d'erreur, par l'application d'une correction devant être apportée à la durée d'une oscillation, ou à la longueur du pendule simple faisant une oscillation dans une seconde. Le calcul de cette correction exige la connaissance d'une quantité k , par laquelle on désigne le rapport de la déviation ε du plan

MOUVEMENT SIMULTANÉ

de suspension, produite par l'application d'une force horizontale d'une valeur connue p , et qui peut être mesurée par un certain poids. Ce rapport k doit être déterminé par des expériences, il peut varier d'un pendule à l'autre, suivant la rigidité plus ou moins grande du trépied en laiton, et il y a également lieu d'examiner s'il ne varie pas, pour le même pendule, suivant la nature du support, ou du pilier, sur lequel le trépied est placé. Si en raison de sa flexibilité, dépendant de la matière dont il est formé, ou de sa masse relativement peu considérable, le support participe d'une manière appréciable au mouvement oscillatoire du trépied métallique, et oscille simultanément avec ce dernier et avec le pendule, le rapport k pourra être différent de celui qui résulterait de la flexion seule du trépied métallique. Dans le cas, par conséquent, où le même pendule aurait servi à la détermination de la pesanteur dans différentes stations, et aurait été placé sur des supports, ou piliers, d'une construction ou d'une nature différente. L'influence de cette cause sur la valeur de k doit être déterminée par des expériences directes.

Ce rapport k peut être déterminé directement par une expérience statique, ainsi que l'a fait M. Peirce: la force horizontale p était donnée par un poids de 1 kg attaché à un fil passant sur la gorge d'une poulie très-mobile, et fixé au plan de suspension, de telle façon qu'il exerçât une traction dans une direction horizontale perpendiculaire au milieu du plan. La déviation ε du plan de suspension résultant de cette traction était mesurée à l'aide d'une échelle en verre fixée au plan, et d'un microscope muni d'une vis micrométrique, placé sur un support indépendant. L'avantage de ce mode d'expérimentation consiste en ce que la force horizontale p , donnée par un poids d'un kilogramme, est beaucoup plus forte que la composante horizontale du poids du pendule, que l'on peut rencontrer même avec les plus grands arcs d'oscillation; la déviation ε est par conséquent aussi beaucoup plus forte que celle qui se produit dans les oscillations du pendule. Cette dernière serait à peine appréciable, et dans tous les cas elle ne serait pas mesurable avec le grossissement que l'on peut obtenir à l'aide d'un microscope, tandis que la déviation pro-

duite par une traction d'un kilogramme s'élève à une quantité qu'il est possible de mesurer avec ce grossissement. Mais il se présente d'un autre côté la question de savoir si la valeur du rapport $\frac{E}{p}$, obtenu par cette expérience statique, peut être appliquée sans autre, pour faire connaître la déviation horizontale produite par les oscillations du pendule, c'est-à-dire dans des circonstances tout à fait différentes. Cette question ne pouvait être tranchée que par des expériences directes, mais il fallait pour cela recourir à un mode d'expérimentation; par lequel on pût obtenir un grossissement beaucoup plus fort que celui qu'il était possible de réaliser avec un microscope, grossissement permettant non-seulement d'apercevoir mais de mesurer, à une petite fraction près, des quantités dont la grandeur réelle ne dépassait pas un petit nombre de microns.

Un pareil grossissement a été obtenu par M. Hirsch, qui a eu l'idée très-heureuse de ne pas mesurer directement la déviation du plan de suspension produite par une force horizontale, mais de la mesurer indirectement par le changement d'inclinaison d'un petit miroir réfléchissant dans une lunette, placée à une distance de plusieurs mètres, les divisions d'une échelle fixée près de cette lunette. Ce petit miroir était fixé à un axe horizontal en acier, terminé par deux pivots reposant sur des coussinets pratiqués dans une pièce de laiton solidement fixée à la muraille. Les déviations du plan de suspension étaient transmises à l'axe par l'intermédiaire d'une pointe très-fine, fixée au plateau qui surmonte le trépied, et sur laquelle venait s'appuyer une lamelle encastrée dans l'axe portant le miroir. L'appareil était lesté à l'aide d'un petit contre-poids de telle façon qu'il vint appuyer contre la pointe avec un poids suffisant, pour qu'il pût suivre celle-ci dans les mouvements alternatifs du plan de suspension résultant de la flexion du trépied. L'inclinaison du miroir subissait des variations égales à l'angle, dont la lamelle faisait tourner l'axe; en faisant appuyer la pointe à un petit nombre de millimètres du centre de l'axe (dans mes expériences environ 3 millimètres en moyenne), et en plaçant la lunette, ainsi que l'échelle à une distance de 4^m,5 du miroir, on obtenait sans peine un grossissement de 3000 fois environ. Lorsque dans les

oscillations du pendule l'amplitude totale de la déviation du plan de suspension ne dépassait pas un petit nombre de microns, 3, 4 ou 5, les déplacements apparents de l'échelle atteignaient 10, 12 à 15 millimètres, c'est-à-dire une quantité susceptible d'être mesurée avec une assez grande approximation.

Après avoir terminé ses expériences à Neuchâtel, M. Hirsch m'envoya le pendule vers la fin du mois d'août, afin que je pusse les répéter à Genève, et je me suis servi du même appareil de miroir qu'il avait fait construire. J'ai seulement employé un autre procédé pour déterminer la longueur du bras de levier, par lequel la pointe agit sur l'axe; M. Hirsch avait enduit l'extrémité de la pointe d'un peu d'entre grasse, afin qu'elle laissât une marque visible au point de la lamelle sur lequel elle avait appuyé; l'expérience terminée, il mesurait à l'aide d'un micromètre la distance de ce point à chacun des bords de l'axe, et par suite à son centre. J'ai pu faire usage pour mes expériences d'une très-bonne vis micrométrique, qui avait été mise à ma disposition avec la plus grande obligeance par l'atelier de construction d'instruments de physique, à Genève. Cette vis pouvait faire mouvoir dans une direction verticale un coulisseau, auquel était fixée la pièce portant les coussinets sur lesquels reposait l'axe; l'on pouvait ainsi faire varier la longueur du bras de levier d'une quantité déterminée en élevant ou en abaissant l'axe d'un nombre donné de tours de la vis micrométrique. Le tambour de celle-ci était divisé en 100 parties, et la hauteur du pas de vis d'un peu plus d'un tiers de millimètre ($21,98 = 1 \text{ mm}$). Pour allonger la longueur du bras de levier de 3 mm exactement, il suffisait d'abaisser le coulisseau de 81,94. La détermination du grossissement se faisait très-simplement avec cet arrangement; la pointe étant à une distance a de l'axe, correspondant à peu près au grossissement que l'on désirait obtenir, on déterminait la grandeur E de l'excursion observée sur l'échelle par l'application d'un poids d'un kilogramme. La valeur de E était déduite de la moyenne de plusieurs lectures de l'échelle, faites alternativement en enlevant et en appliquant ce poids d'un kilogramme. Puis, après avoir abaissé le coulisseau de 81,94,