de l'horloge est rarement commode. La principale objection à l'enrégistrement chronographique des passages observés est que la lecture des signaux exige un travail considérable. L'instrument automatique construit pour moi par M. *Breguet* m'a donné d'excellents résultats, et je l'employerais d'ordinaire si j'avais un bon chronoscope de Hipp.

Si j'avais pu aller à Munich, j'aurais demandé à donner lecture à l'association d'un mémoire sur la flexion des supports.

Ce mémoire rend compte de nombreuses sortes d'expériences sur la flexion statique et dynamique de divers supports et sur les periodes d'oscillation des pendules y attachés. J'examine les moyens propres à mesurer la flexion et je montre la supériorité de la méthode optique. Je démontre que la différence entre la flexion statique et la flexion dynamique est insignifiante quand les supports ont été judicieusement établis, et que la flexion statique représente aussi bien que la flexion dynamique l'effet produit sur la durée de l'oscillation; que c'est une erreur de croire que la flexion soit sensiblement modifiée par la suspension d'un poids médiocre ou considérable. Je décris les curieux effets qu'on obtient en serrant ou en relâchant les écrous qui relient les pièces du trépied Repsold et comment le relâchement peut, dans certaines circonstances, diminuer l'effet de la flexion. Il y a un rapport entre ce fait et celui que j'avais etabli dans ma première communication, à savoir que la flexion n'est pas rectiligne, de sorte qu'elle diffère sensiblement pour des parties de la tête des supports éloignées d'un petit nombre de millimètres. Les déterminations obtenues sans qu'on eût tenu compte de cette circonstance, doivent être répétées.

Il sera difficile de se procurer en campagne un support sur lequel le fléchissement ne produise pas d'effet sensible. Il serait certainement imprudent d'admettre que sur un certain support cet effet est nul, sans avoir essayé d'en obtenir quelque preuve expérimentale. Un pendule renversé de Hardy suffira peut-être pour cela, mais il me parait plus sûr de mesurer la flexion.

Je travaille depuis longtemps à une recherche sur l'importance relative des différentes sources d'erreur dans les expériences de pendule.

Veuillez, je vous prie, Monsieur, être l'interprète auprès de l'association de ma gratitude pour le concours aimable et empressé que j'ai rencontré chez tous ses membres et agréez vous-même l'assurance de mon profond respect.

C. S. Peirce,
Assistant U. S.
Coast & Geod. Survey.

A Monsieur *Faye*,
Membre de l'Institut
etc. etc. etc.

P 216

Verhandlungen der permanenten Commission.

Erste Sitzung.

Verhandelt München, den 12. September 1880.

Anfang der Sitzung 11 Uhr 20 Minuten.

Anwesend die Herren: *Baeyer, von Bauernfeind, Bruhns, Faye, von Forsch, Hirsch, Ibañez, Mayo, von Oppolzer;* von den Commissaren die Herren: *Ferrero, Nagel, Seidel.*

Präsident: Herr *Ibañez.*

Secretäre: die Herren *Bruhns* und *Hirsch.*

Herr *Ibañez* begrüsst die anwesenden Herren und Herr *von Bauernfeind* bewillkommnet die Mitglieder der permanenten Commission, welche zu seiner grossen Freude München einstimmig als Versammlungsort gewählt; er wünsche nur, dass es Allen hier gefallen möge.

Von Herrn *Hirsch* wird ein Schreiben des Herrn *Hilgard* aus Washington mitgetheilt, wonach dieser und auch Herr *Peirce* leider durch Familienverhältnisse verhindert seien, nach München zur allgemeinen Conferenz zu kommen. Nach einem andern Schreiben werden die Herren *Bakhuyzen* und *Oudemans* aus den Niederlanden erscheinen.

Die Commission beschliesst auf Vorschlag ihres Präsidenten, der Conferenz die Annahme der Geschäftsordnung, welche in Stuttgart gegolten, zu empfehlen, und, falls nicht Vorschläge aus der Versammlung kommen, Herrn *Baeyer* als Ehrenpräsidenten, Herrn *von Bauernfeind* als Präsidenten, die Herren *Faye* und *Mayo* als Vicepräsidenten und die Herren *Bruhns* und *Hirsch* als Secretäre vorzuschlagen.

Der Präsident stellt das Programm zur Berathung.

Herr *Bruhns* zieht den von ihm gestellten Antrag einer Statutenänderung, welcher den Punkt IV betrifft und die Zusammenkünfte der Bevollmächtigten auf fünf Jahre, die der permanenten Commission nach Bedarf anzusetzen bezweckt, zur Zeit zurück, weil mehrere der Herren Mitglieder der permanenten Commission bei dem

PROCÈS VERBAUX DE LA COMMISSION PERMANENTE.

PREMIÈRE SÉANCE.

Munich, 12 Septembre 1880.

La séance est ouverte à 11 heures 20 minutes.

Sont présents: M. M. *Baeyer, von Bauernfeind, Bruhns, Faye, von Forsch, Hirsch, Ibañez, Mayo, von Oppolzer;* assistent en outre M. M. les délégués: *Ferrero, Nagel, Seidel.*

Présidence de M. *Ibañez.* M. M. *Bruhns* et *Hirsch* fonctionnent comme secrétaires.

M. *von Bauernfeind* souhaite la bienvenue à la Commission qui — à sa grande satisfaction — a choisi Munich à l'unanimité pour lieu de réunion; il désire que tous les membres de la Conférence s'y plaisent.

M. *Hirsch* donne connaissance d'une lettre de M. *Hilgard* de Washington, d'après laquelle lui même aussi bien que M. *Peirce* sont empêchés malheureusement de venir assister à la Conférence générale. — Une autre lettre annonce l'arrivée de M. M. *Bakhuyzen* et *Oudemans* des Pays-Bas.

La Commission, sur la proposition du Président, décide de recommander à la Conférence l'adoption du Règlement du Stuttgart — et s'il ne se perduisent pas de propositions dans l'assemblée même — de proposer M. *Baeyer* pour Président d'honneur, M. *von Bauernfeind* comme Président, M. M. *Faye* et *Mayo* comme Vice-Présidents, M. M. *Bruhns* et *Hirsch* comme Secrétaires.

M. le Président ouvre la discussion sur le programme.

M. *Bruhns* retire, pour cette fois, du programme le point IV qu'il avait proposé, savoir la modification des statuts, en ce sens que désormais les conférences générales auraient lieu tous les cinq ans et les réunions de la Commission permanente suivant les besoins; il le retire parceque plusieurs des membres de la Commission envisagent qu'avec le développement rapide des travaux de l'Association, les réunions annuelles ainsi que les Conférences générales tous les trois ans sont encore utiles et fournissent l'occasion d'initiatives productives.

RAPPORT

SUR LA

QUESTION DU PENDULE

PRÉSENTÉ

A L'ASSOCIATION GÉODÉSIQUE

PAR

C. CELLÉRIER.

ANNEXE II.

Dans la dernière réunion de l'association géodésique M. Plantamour et moi avons été chargés d'étudier la question du pendule double, et en général les améliorations à apporter au pendule à réversion.

Ce même sujet a donné lieu depuis à des travaux importans. M. Yvon Villarceau, dans un savant mémoire, a calculé les effets du roulement: En supposant le pendule suspendu par des rouleaux de grand rayon, il a déterminé la loi de variation des amplitudes, et les corrections de la durée qui donnent la valeur exacte de g. Si le coefficient du frottement peut être rendu assez faible pour que l'expérience dure un temps suffisant, cette disposition aura sans doute l'avantage de donner une grande stabilité au mode de suspension, en empêchant la détérioration des couteaux et régularisant le frottement.

M. Faye, pour remédier au mouvement des supports, avait déjà proposé le pendule double; il a récemment indiqué une autre disposition de cet appareil, et a de plus entrepris de supprimer l'erreur par un tout autre moyen, savoir en faisant osciller dans le vide un pendule léger sur un support très ferme.

Les diverses dispositions du pendule double seront bientôt analysées; mais comme on devra lui appliquer les mêmes corrections qu'au pendule de Bessel, je dois d'abord en rappeler la nature, ou préciser l'état actuel de la question.

Corrections du pendule de Bessel.

On ne peut observer que deux élémens avec une exactitude complète, ou de premier ordre; ce sont la distance des couteaux, désignée par λ, et la durée d'oscillation. Pour cette dernière, il faut que l'expérience dure un temps considérable, afin que l'erreur des signaux au commencement et à la fin soit répartie sur un grand nombre d'oscillations; quant à la distance λ, sa mesure nécessite des précautions minutieuses, savoir: une étude comparée des coefficiens de dilatation de la tige et de la règle, des modifications que le voisinage de l'expérimentateur apporte aux lignes de visée des micromètres, la mesure de l'écrasement des couteaux, etc.

1*

D'autres élémens ne peuvent être obtenus qu'avec une exactitude un peu moindre; ce sont entre autres la position du centre de gravité, et la longueur réduite du pendule, ou ce qui revient au même, son moment d'inertie par rapport au centre de gravité. L'appareil est construit de façon que ce moment soit à très peu près mhh', m étant la masse du pendule, h et h' les distances du centre de gravité aux deux couteaux; sa valeur exacte est donc

$$m\,(hh' + \beta),$$

β étant une inconnue dont on sait seulement qu'elle est très petite. Dans le premier mode de suspension, τ étant la durée, l la longueur réduite, on a en négligeant toute action troublante

$$(1) \qquad l = h + \frac{hh' + \beta}{h} = \lambda + \frac{\beta}{h}, \; \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\left(1 + \frac{\beta}{2h\lambda}\right).$$

On a de même dans le deuxième mode de suspension.

$$\tau' = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\left(1 + \frac{\beta}{2h'\lambda}\right);$$

d'où résulte

$$\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} = \tau' + \frac{h}{h' - h}(\tau' - \tau):$$

ayant mesuré exactement λ, on tire g de cette formule; l'inconnue β en est éliminée, et il en est de même de la légère erreur qu'on a pu commettre sur h, h', parce qu'elle se trouve multipliée par le petit nombre $\tau' - \tau$; on doit seulement avoir soin que $h' - h$ ne soit pas trop petit, ou que le centre de gravité soit à une notable distance du milieu de la tige.

L'altération de durée provenant de l'action de l'air, en supposant le pendule symétrique de forme, est également, pour une même amplitude, proportionnelle à $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$ dans les deux modes de suspension: les termes qui en proviennent se confondent donc avec $\frac{\beta}{2h\lambda}$, $\frac{\beta}{2h'\lambda}$, et se trouvent éliminés en même temps; cette circonstance est d'autant plus importante qu'on ne peut point les calculer *a priori;* la résistance de l'air, qui est lui même en mouvement, ne peut en effet, comme pour le mouvement des projectiles, être assimilée à une fonction de la vitesse. Enfin, s'il y a une altération de durée par suite du frottement, ce qui est fort douteux, elle se trouve également éliminée.

Quant au balancement du support, il introduit dans les valeurs de τ et τ' des termes proportionnels à h, h', et non à $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, de sorte que le calcul ci-dessus ne les fait point disparaître. Toutefois ces termes peuvent être calculés directement, ce qui n'avait pas lieu pour les autres; ils dépendent d'un petit nombre k, qu'on peut appeler la constante du balancement; c'est le rapport d'une petite déviation horizontale du support à la force qui la produit.

Si on cherche ce rapport par une expérience statique, en appliquant une force horizontale au support, on observe un phénomène singulier: la déviation n'est pas instantanée comme devrait l'être la déformation d'un corps élastique; elle augmente pendant plus d'une minute, et semble accompagnée d'une sorte de tassement progressif du sol. Le mouvement du pendule est donc accompagné d'une flexion des pièces métalliques, et en outre les piliers et le sol cédant légèrement sous les pieds, produisent un ballottement général du support, moins prolongé toutefois que dans l'expérience statique; aussi la valeur de k déduite de cette dernière est supérieure à celle qui correspond au mouvement, et l'on est forcé pour la trouver, d'effectuer sur le pendule même une série d'observations directes fort délicates. Ce travail est à recommencer à chaque station, la valeur de k variant avec la disposition des piliers et la nature du sol.

C'est pour éviter ces complications que M. Faye a eu l'ingénieuse idée de faire osciller deux pendules en sens contraire sur un même support; il reste à chercher quelle sera la disposition préférable à donner à cet appareil, et à quelles conditions il devra satisfaire.

Je nommerai *mouvement simple* celui dans lequel on néglige l'action de l'air et des frottemens, et les corrections d'amplitude, considérant ainsi les écarts de la verticale comme infiniment petits pour les deux pendules; le *mouvement troublé* sera celui dans lequel on tient compte de toutes ces circonstances. La première condition à satisfaire par l'appareil sera, qu'en supposant le mouvement simple réalisé, on puisse en tirer la valeur de g; nous devons donc examiner celui-là en premier lieu. M. Pierce dans un travail intéressant en a déjà donné la loi pour un cas particulier qui diffère à peine du cas général; aussi j'adopterai autant que possible ses notations.

Equations du mouvement simple.

L'équation du mouvement d'un pendule unique quand le support oscille est (Note sur le mouvement simultané d'un pendule et de son support. Archives des sciences, Octobre 1875)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{\mu'}{mhl},$$

dans laquelle

$$\mu' = mh\left[\sin\theta \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} - \cos\theta\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right].$$

L'écart de la verticale, supposé infiniment petit, est désigné par θ, de sorte que $\sin\theta = \theta$: y_1 est l'excursion horizontale du couteau, en lui attribuant un mouvement de translation perpendiculaire à sa longueur; nous admettrons qu'il n'en a pas d'autre; x_1, qui désigne son excursion verticale, sera donc nulle: l'équation se réduit ainsi à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{1}{l}\frac{d^2y_1}{dt^2}.$$

Supposons ensuite que deux pendules soient disposés d'une façon quelconque sur un support commun: nommons l_1, l_2, leurs longueurs réduites: ϕ_1, ϕ_2, au lieu de θ, les écarts de la verticale: s_1, s_2, au lieu de y_1, les excursions des couteaux, comptées positivement du même côté que ϕ_1, ϕ_2; les équations de leur mouvement seront

$$(2)\qquad \begin{cases} l_1 \dfrac{d^2\phi_1}{dt^2} + \dfrac{d^2 s_1}{dt^2} + g\,\phi_1 = o, \\[2ex] l_2 \dfrac{d^2\phi_2}{dt^2} + \dfrac{d^2 s_2}{dt^2} + g\,\phi_2 = o, \end{cases}$$

qui coïncident avec celles de M. Pierce. Les excursions dues à de faibles pressions sur les supports en sont des fonctions qu'on peut regarder comme linéaires; ces pressions, exercées par les couteaux, sont d'ailleurs proportionnelles à ϕ_1, ϕ_2; on aura donc

$$(3)\qquad s_1 = x\phi_1 + y\phi_2, \qquad\qquad s_2 = x'\phi_2 + y'\phi_1,$$

x, y, x', y' étant des constantes.

Nous devons mentionner deux cas particuliers:

Premier cas. Les tranchants sont placés sur une même droite horizontale, et les résistances du support parfaitement symétriques pour tous deux; c'est la disposition employée par M. Pierce; on aura alors comme il le suppose $x' = x$, $y' = y$, par suite de cette symétrie.

En supposant $\phi_2 = o$ les équations (3) dans cette hypothèse donnent

$$\frac{x}{y} = \frac{s_1}{s_2};$$

c'est le rapport des déviations des supports des deux couteaux quand une force agit sur le premier seulement. Dans ce cas on ne peut évidemment avoir $s_1 < s_2$: il est également difficile de supposer $s_1 = s_2$; le plateau portant les pendules est trop massif pour se tordre, mais les pieds doivent fléchir légèrement de façon à amener une torsion ou rotation insensible de l'appareil; en effet les excursions ne sont que d'un petit nombre de microns, et si la différence $s_1 - s_2$ en a un, en prenant 0^m^2 pour la distance horizontale des tranchants, la rotation correspondante n'est que d'environ 1''; ainsi ce mouvement doit se produire, et il en résulte $s_1 > s_2$; par suite $x > y$.

Second cas. C'est la disposition, indiquée en dernier lieu par M. Faye, dans laquelle les deux pendules oscillent dans un même plan, les deux tranchants étant perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux. Il n'y a pas alors de torsion, et en comptant ϕ_1, ϕ_2, positivement d'un même côté, on a $s_1 = s_2$. Les pressions exercées sur les deux couteaux ont pour somme $\frac{s_1}{k}$, k étant la constante du balancement. En

supposant les deux pendules aussi semblables que possible, nommant p leur poids commun, l leur longueur moyenne, on aura

$$(4)\qquad \frac{s_1}{k} = \frac{s_2}{k} = \frac{ph}{l}(\phi_1 + \phi_2), \qquad\qquad x' = x = y' = y = \frac{kph}{l}.$$

Lois du mouvement simple.

On trouvera ces lois pour une disposition quelconque en substituant les valeurs (3) dans les formules (2). Si l'on pose

$$(5)\qquad \frac{l_1 + l_2}{2} = l, \qquad \frac{x + x'}{2} = x'', \qquad \frac{l_1 + x - l_2 - x'}{2} = \delta,$$

on trouvera

$$(6)\qquad \begin{cases} (l + x'' + \delta)\dfrac{d^2\phi_1}{dt^2} + y\dfrac{d^2\phi_2}{dt^2} + g\,\phi_1 = o, \\[2ex] (l + x'' - \delta)\dfrac{d^2\phi_2}{dt^2} + y'\dfrac{d^2\phi_1}{dt^2} + g\,\phi_2 = o, \end{cases}$$

et il est clair qu'en échangeant au besoin les lettres correspondant aux deux pendules, on peut regarder δ comme positif.

Les intégrales complètes de ces équations sont

$$(7)\qquad \begin{cases} \phi_1 = \mathrm{A}\cos(mt + f) + \mathrm{B}\cos(m't + f'), \\ \phi_2 = \mathrm{A}'\cos(mt + f) + \mathrm{B}'\cos(m't + f'), \end{cases}$$

en posant

$$(8)\qquad \begin{cases} m = \sqrt{\dfrac{g}{l + x'' - \rho}}, \qquad m' = \sqrt{\dfrac{g}{l + x'' + \rho}}, \qquad \rho = \sqrt{\delta^2 + yy'}, \\[2ex] \mathrm{A}' = \mathrm{A}n, \quad \mathrm{B}' = \mathrm{B}n', \qquad n = \dfrac{-\delta - \rho}{y}, \qquad n' = \dfrac{-\delta + \rho}{y}. \end{cases}$$

De la sorte A, B, f, f' sont des constantes arbitraires dépendant des circonstances initiales; m, m', n, n' ne dépendent que de la nature de l'appareil. On peut vérifier que par suite de la stabilité du système, yy' est positif.

Les valeurs de x, y, x', y', x'' sont très petites, et à cause de la similitude des pendules il en est de même de δ et par suite de ρ; ainsi on a sensiblement

$$\frac{m - m'}{m} = 1 - \sqrt{\frac{l + x'' - \rho}{l + x'' + \rho}} = \frac{\rho}{l},$$

de sorte que m, m' sont presque égales et $m > m'$.

Pour interpréter les formules (7) commençons par le cas où l'on a à la fois numériquement $A > B$ et $A' > B'$; c'est le seul qui nous servira plus tard.

Le cas considéré par M. Pierce diffère à peine du cas général, et on pourrait comme lui vérifier par une construction géométrique que chaque pendule aura une durée moyenne d'oscillation égale à $\frac{\pi}{m}$, et que celle-ci pourrait se conclure de l'observation, en notant les instants où les deux pendules passent à la fois par la verticale. Toutefois, pour l'usage plus étendu que nous avons à faire du résultat, il convient d'employer la méthode analytique, en transformant comme il suit les formules (7). Posons.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(m-m')\,t+f-f'}{2}=u, \qquad \frac{(m+m')\,t+f+f'}{2}=u', \\ &u''=\text{arc tang}\left(\frac{A-B}{A+B}\ \text{tang}\ u\right). \end{aligned}\right.$$

Comme $\frac{A-B}{A+B}$ est positif, u'' pourra être supposé toujours compris dans le même quadrant que u, et croîtra ainsi avec u d'une manière continue. Par suite en posant $u-u''=\psi$, ψ sera toujours compris entre $\pm\frac{1}{2}\pi$; on aura d'ailleurs

$$(10)\qquad \text{tang}\ \psi=\text{tang}\ (u-u''), \qquad \psi=\text{arc tang}\left(\frac{B\sin 2u}{A+B\cos 2u}\right).$$

La valeur (7) de ϕ_1 peu s'écrire

$$\phi_1=(A+B)\cos u\cos u'-(A-B)\sin u\sin u',$$

ou

$$\phi_1=\frac{(A+B)\cos u}{\cos u''}\cos(u'+u'').$$

En posant

$$(11)\qquad \alpha=\sqrt{(A+B)^2\cos^2 u+(A-B)^2\sin^2 u},$$

on a

$$\cos u''=\pm\frac{(A+B)\cos u}{\alpha}.$$

En remarquant que $\cos u''$ et $\cos u$ ont le même signe et que

$$u'+u''=u'+u-\psi=mt+f-\psi,$$

on trouvera

$$(12)\qquad \phi_1=\pm\,\alpha\cos(mt+f-\psi),$$

le signe $\pm$ étant celui de $A+B$ ou de A. On aurait également

$$\phi_2=\pm\,\alpha'\cos(mt+f-\psi'), \qquad \psi'=\text{arc tang}\left(-\frac{B'\sin 2u}{A'+B'\cos 2u}\right),$$

ψ' étant compris entre $\pm\frac{1}{2}\pi$, et α' ayant une valeur analogue à celle de α.

L'angle $2u$ ayant pour dérivée $m-m'$ varie avec une extrême lenteur; par suite il en est en général de même de α, α', ψ, ψ'; α, α' représentent les maxima de ϕ_1, ϕ_2, ou les amplitudes.

Les passages simultanés des deux pendules par la verticale ont lieu quand on a à la fois

$$\begin{aligned} A\cos(mt+f)+B\cos(m't+f')&=o, \\ A'\cos(mt+f)+B'\cos(m't+f')&=o. \end{aligned}\qquad (13)$$

En laissant de côté le cas particulier où l'on aurait

$$A=A'=o, \qquad \text{ou} \qquad B=B'=o,$$

il en résulte

$$\cos(mt+f)=o, \qquad \cos(m't+f')=o,$$

de sorte que $mt+f$, $m't+f'$ ont tous deux la forme $(i+\frac{1}{2})\pi$, i étant un entier; leur différence $2u$ a alors la forme $i\pi$; réciproquement quand $2u$ a cette forme, il en est sensiblement ainsi pendant tout une oscillation puisqu'il varie très lentement; par suite quand $mt+f$ atteint une valeur de la forme $(i+\frac{1}{2})\pi$, on en peut dire autant de $m't+f'$, et le passage simultané par la verticale a lieu; ces passages s'effectuent donc à tous les instants où l'on a à la fois

$$2u=\text{mult. de}\ \pi, \quad \psi=o, \quad \psi'=o.$$

Ils se répètent après une durée considérable $\frac{\pi}{m-m'}$ que M. Pierce appelle un *cycle*.

Comme à l'instant des passages u est un multiple tour à tour pair et impair de $\frac{1}{2}\pi$, l'expression (11) de l'amplitude prendra sa valeur la plus grande et la plus petite; ce seront, au signe près, $A+B$, $A-B$: dans l'intervalle elle variera toujours dans le même sens.

L'angle $mt+f-\psi$ ou $u'+u''$ est toujours croissant; par suite $\cos(mt+f-\psi)$ qui s'annulle avec ψ au commencement et à la fin d'un cycle, s'annullera dans l'intervalle le même nombre de fois que $\cos(mt+f)$, et à chaque fois le premier pendule passera par la verticale; il en résulte évidemment que la durée moyenne d'oscillation est $\frac{\pi}{m}$; c'est pour la même raison celle du second pendule.

Si l'on supposait numériquement $B > A$, on devrait prendre

$$u'' = \text{arc tang}\left(\frac{B-A}{B+A}\,\text{tang}\,u\right),\quad u - u'' = \psi,$$

de sorte que ψ restât compris entre $\pm\frac{1}{2}\pi$; on aurait en même temps

$$\phi_1 = \pm\, a\cos(u' - u'') = \pm\, a\cos(u' - u + \psi) = \pm\, a\cos(m't + f' + \psi),$$

a ayant la valeur (11), et l'on en conclurait comme précédemment que la durée moyenne serait $\frac{\pi}{m'}$, pourvu que l'angle $m't + f' + \psi$ ou $u' - u''$, fût toujours croissant: c'est ce qui aura lieu en général, u et u'' variant beaucoup plus lentement que u'. Il pourrait en être autrement si A et B différaient très peu; en même temps le minimum de a serait presque o; c'est un cas anormal, étranger aux applications du pendule, et dont la discussion serait inutile. En le laissant de côté on voit que la durée moyenne d'oscillation sera, ou $\frac{\pi}{m}$ pour les deux pendules, ou $\frac{\pi}{m'}$ pour tous deux, ou $\frac{\pi}{m}$ pour l'un et $\frac{\pi}{m'}$ pour l'autre.

Choix de la disposition du pendule double.

L'appareil peut s'employer de deux manières:

1º La *méthode directe* consiste à observer une série d'oscillations d'un des pendules en cherchant à atténuer ou à mesurer l'erreur due à l'influence de l'autre.

2º La *méthode des passages* consiste à noter les passages simultanés par la verticale pour en déduire la durée moyenne $\frac{\pi}{m}$ ou $\frac{\pi}{m'}$.

En tout cas il faut qu'en supposant le mouvement simple on puisse en tirer la valeur de g.

La disposition employée par M. Pierce se prêterait mal au premier procédé, car les pendules marchant en sens contraire tendent à produire un balancement de torsion que nous avons vu n'être pas négligeable. Quant à déduire g de $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{m'}$, c'est à dire de

$$\pi\sqrt{\frac{l + x \pm \sqrt{\delta^2 + y^2}}{g}},$$

cela exige une mesure directe de x, y, ou au moins, en supposant δ très petit, de $x - y$; nous avons vu que cette quantité n'était pas nulle, et les variations continuelles de la valeur de k ne permettent guères de supposer qu'une mesure suffirait une fois pour toutes, la rotation comme le balancement pouvant être influencée par le sol ou les piliers.

La même disposition offre un autre inconvénient, car elle suppose les résistances du support complètement symétriques pour les deux pendules; c'est impossible avec trois pieds; s'il y en a quatre, leur contact avec leur point d'appui devrait être rigoureusement pareil, et une inégalité de température suffirait pour qu'il n'en fût plus ainsi. L'on n'est pas sûr non plus que la nature du sol soit la même de part et d'autre; le voisinage d'un mur ou d'autres circonstances peuvent l'affecter.

Il est évident que des dispositions plus compliquées auraient des inconvénients analogues, et par suite la seconde disposition de M. Faye semble devoir être préférée. Les formules (8) doivent alors être remplacées par

$$(13)\quad \begin{cases} m = \sqrt{\dfrac{g}{l + y - \rho}},\quad m' = \sqrt{\dfrac{g}{l + y + \rho}},\quad \rho = \sqrt{\delta^2 + y^2},\quad \delta = \dfrac{l_1 - l_2}{2}, \\ n = \dfrac{-\delta - \rho}{y},\quad n' = \dfrac{-\delta + \rho}{y},\quad y = \dfrac{kph}{l}. \end{cases}$$

Il est à remarquer que $\frac{kp}{l}$ est l'erreur relative de g due au balancement dans le pendule ordinaire, et $\frac{kph}{2l^2}$, ou $\frac{y}{2l}$, est celle de la durée pour un des modes de suspension; ainsi $\frac{y}{l}$ n'est pas négligeable.

La méthode directe suppose une faible influence, par suite une faible différence entre la durée moyenne, et la durée T_1 du premier pendule oscillant seul; leurs valeurs sont

$$\frac{\pi}{m} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{y - \rho}{2l}\right),\quad \frac{\pi}{m'} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{y + \rho}{2l}\right),$$

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l + \delta}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\delta}{2l}\right);$$

cela exige évidemment que la durée moyenne soit $\frac{\pi}{m}$, que δ soit plus petit que y, et que $-\frac{y - \rho}{2l}$ ou $\frac{\delta^2}{4ly}$ soit très petite.

Dans la méthode des passages on ne pourrait déduire g de m' sans mesurer y; il faut donc encore que la durée moyenne soit $\frac{\pi}{m}$, et qu'on puisse y négliger $y - \rho$, c'est à dire que la fraction $\frac{\delta^2}{2ly}$, considérée comme erreur relative de g, soit sans importance. Mais en supposant $\frac{\pi}{m}$ ainsi réduite à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on en pourra tirer g comme il suit: en nommant λ_1, λ_2, pour chaque pendule, la distance des couteaux, et β_1, β_2 de petits nombres inconnus, on aura par la formule (1)

$$l_1 = \lambda_1 + \frac{\beta_1}{h},\qquad l_2 = \lambda_2 + \frac{\beta_2}{h},$$

et en posant

$$\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=\lambda, \qquad \frac{\beta_1+\beta_2}{2}=\beta,$$

il en résultera

$$l=\lambda+\frac{\beta}{h}, \qquad \frac{\pi}{m}=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\left(1+\frac{\beta}{2\lambda h}\right),$$

et le calcul s'achèvera comme pour un pendule ordinaire. En supposant la disposition du pendule double ainsi choisie, d'autres propriétés du mouvement simple nous sont encore nécessaires.

Influence de la mise en mouvement. Variations de l'amplitude, de la phase, et de la durée.

Les pendules devant marcher en sens contraire, supposons les mis en mouvement d'une manière parfaite, de sorte qu'à l'instant initial ils soient livrés à eux mêmes avec des amplitudes α égales et opposées. On aura à la fois, d'après les formules (7),

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\, m \sin f + \mathrm{B}\, m' \sin f' = o, \qquad && \mathrm{A} \cos f + \mathrm{B} \cos f' = \alpha, \\ &\mathrm{A}'\, m \sin f + \mathrm{B}'\, m' \sin f' = o, && \mathrm{A}' \cos f + \mathrm{B}' \cos f' = -\alpha, \end{aligned}$$

qui seront satisfaites en prenant

$$f = f' = o, \qquad \alpha = \mathrm{A}+\mathrm{B} = -(\mathrm{A}n+\mathrm{B}n'),$$

d'où l'on tire

$$\text{(14)} \qquad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = -\frac{n+1}{n+1}.$$

En supposant $\frac{\delta}{y}$ petit, on voit par les formules (13) que n diffère peu de -1, et n' de 1; ainsi $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'}$ sont de petites fractions.

Amplitudes. Leur rapport qui était au commencement $-\frac{\mathrm{A}'+\mathrm{B}'}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ ou 1, devient à la fin du cycle, d'après la formule (14)

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\mathrm{A}'-\mathrm{B}'}{\mathrm{A}-\mathrm{B}} = \frac{-\mathrm{A}n+\mathrm{B}n'}{\mathrm{A}-\mathrm{B}} = -\frac{2\,nn'+n+n'}{2+n+n'} = \frac{y+\delta}{y-\delta};$$

ainsi ce maximum est à peu près $1+\frac{2\delta}{y}$ et peut dépasser sensiblement l'unité.

Phases. Nommons *différence de phase* la quantité $v=mt'$, t' étant le temps écoulé entre le passage des deux pendules par la verticale; on aura à ces deux instans

$$mt+f-\psi=(i+\tfrac{1}{2})\,\pi, \qquad mt+f-\psi'+mt'=(i+\tfrac{1}{2})\,\pi,$$

i étant le même entier; ainsi $v=mt'=\psi'-\psi$; en substituant $\psi=u-u''$, posant

Annexe IIa.

RAPPORT

SUR

LA 7^ME^ QUESTION DU PROGRAMME DE LA SIXIÈME CONFÉRENCE GÉNÉRALE RÉUNIE À MUNICH EN 1880.

La question relative au pendule, sur laquelle nous avions été chargés par la commission permanente, lors de sa réunion à Genève en 1879, de présenter un rapport, comprend plusieurs points: Il s'agissait, en premier lieu, de dresser un tableau, pour ainsi dire statistique, des travaux effectués ces dernières années dans les différents pays, en vue de la détermination de la pesanteur, et des résultats obtenus; nous étions chargés en outre, d'étudier les améliorations pouvant être apportées dans l'emploi du pendule à réversion pour écarter la cause d'erreur provenant du balancement du trépied métallique, et du pilier sur lequel il est placé, et en particulier la combinaison du pendule double, proposée dans ce but par M. *Faye*, sur laquelle M. *Peirce* avait déjà publié un mémoire.

Pour être en mesure de répondre au premier point, je m'étais adressé par voie de circulaire aux commissaires des différents pays pour leur demander les informations et les renseignements qui étaient nécessaires, et c'est d'après les réponses qu'ils ont eu l'obligeance de me faire parvenir sur les différents points du questionnaire, que j'ai pu dresser le tableau ci-annexé.

Tableau

résumant par ordre alphabétique l'état actuel des travaux entrepris dans les différents pays pour la détermination de la pesanteur à l'aide du pendule à réversion.

Autriche. M. le Prof. *von Oppolzer*.

Stations: Vienne, Pfänder (Bregenz), Dablitz (Prague), Kremsmünster, Cracovie, Lemberg, Czernowitz, Pola et Ragusa; la latitude de toutes ces stations a été déterminée, de même que la longitude, sauf pour Lemberg, Czernowitz et Ragusa. Les observations ont été faites en outre à Berlin. L'appareil employé est le pendule à réversion de Repsold, d'un mètre de longueur environ, et le mode d'observation est celui des coïncidences, à l'aide de l'appareil de *Gruber* décrit dans les comptes rendus de l'Académie de Vienne, Tome LXXI. Janvier 1875.

La réduction des observations n'est terminée que pour les expériences faites à Berlin et au Pfänder (Bregenz); la correction pour le mouvement des supports n'a pas encore été déterminée, mais des expériences dans ce but sont projetées.

Bavière. M. le Colonel *von Orff.*

Station: Bogenhausen. L'instrument était le pendule à réversion de la commission géodésique autrichienne; méthode: enregistrement chronographique de la durée de 2000 oscillations et également celle des coïncidences par l'appareil de *Gruber.* Expériences faites pour déterminer le mouvement du support à l'aide d'un pendule auxiliaire à fil, dont les déviations étaient observées avec un fort microscope, soit pendant que le pendule oscillait, soit par l'application d'un poids de 100 à 900 grammes. La réduction n'est pas encore terminée.

Belgique. M. le Colonel *Adan.*

Les déterminations ne sont pas encore commencées.

Espagne. M. le Général *Ibañez.*

Les déterminations ne sont pas encore commencées, mais elles le seront prochainement.

Italie. M. le Général *Mayo.*

Les déterminations ne sont pas encore commencées, mais M. le Prof. *Lorenzoni* a été chargé de s'occuper de ces expériences.

Norvège. M. *Fearnley.*

Aucune observation du pendule n'a été faite en Norvège à une époque récente.

Hesse-Darmstadt. M. le Prof. *Nell.*

Aucune détermination n'a été faite; il n'est pas projeté d'en faire.

Hollande. M. *Stamkart.*

Stations: Leyde, où les observations ont été faites par M. le Dr. *Albrecht* avec l'instrument de l'Institut géodésique de Prusse, par la méthode des coïncidences; les résultats, dans lesquels il n'a pas été tenu compte du mouvement des supports, ont été imprimés dans les publications de l'Institut géodésique de Prusse 1871. Stations dans lesquelles des observations sont projetées avec le pendule à réversion du cabinet de physique de Harlem: Leyde, Utrecht et éventuellement Harlem.

Portugal. M. *Arbués Moreiro.*

Les déterminations ne sont pas encore commencées, mais elles le seront prochainement, à l'aide du pendule à réversion, dans les stations de Lisbonne et de Coimbre, auxquelles on ajoutera probablement plus tard d'autres stations.

Prusse. M. le Prof. *Albrecht.*

Les stations dans lesquelles la détermination de la pesanteur a été effectuée avec le pendule à réversion de l'Institut géodésique de Prusse sont: Gotha, Seeberg, Inselsberg, Berlin, Leipzig, Dresde, Bonn, Leyde, Mannheim et Freiberg; toutes ces stations sont reliées au réseau géodésique des pays, et les coordonnées astronomiques déterminées pour toutes, sauf pour Freiberg. La méthode employée a été l'enregistrement chronographique des passages pour les observations faites en 1869, c. à d. pour les 5 premières stations indiquées, et celle des coïncidences pour les observations faites dans les 5 dernières en 1870 et 1871. La réduction définitive des observations faites à Leipzig et à Freiberg n'est pas encore terminée, pour les autres stations les résultats sont donnés dans les publications de l'Institut géodésique de Prusse. Il n'a pas été fait encore d'expériences directes sur le mouvement des supports, et sur la correction à apporter à la longueur du pendule simple à seconde pour tenir compte de ce mouvement; seulement une valeur approchée de cette correction a été obtenue par la comparaison de la longueur du pendule trouvée par *Bessel* en 1835 avec celle que donnent les observations avec le pendule à réversion. M. *Albrecht* estime que cette correction de $+ 0^{mm}.182$, déterminée ainsi pour Berlin, peut s'appliquer également aux autres stations.

Russie. M. le Général *von Forsch.*

Le rapport de M. le Général *von Forsch* résume d'abord les observations faites par l'amiral *Lütke* dans sa campagne de circumnavigation, puis il donne les résultats obtenus ces dernières années pour 13 stations[1]) russes par M. M. *Sawitsch*, *Leny* et *Smyslow*. Ces savants se sont servis de deux pendules à réversion de Repsold (le petit module, durée oscillat. $\frac{3}{4}$ⁿ) et ils ont employé la méthode des coïncidences. Dans aucune des stations, il n'a été tenu compte du mouvement du trépied et des supports. Plus tard, en 1874, M. le Colonel *Zinger* fit avec les deux appareils une nouvelle détermination à Pulkowa, en 1876, 1877 à 1878 le Général *Stebnitzki* et le Colonel *Kodlberg* à Tiflis.

Saxe. M. le Prof. *Bruhns.*

Stations: Leipzig, Dresde et Freiberg, dont il a été déjà fait mention dans le rapport de M. le Prof. *Albrecht.*

---

[1]) Tornea, Nicolaistadt, St. Petersburg, Pulkowa, Réval, Dorpat, Jakobstadt, Wilna, Belin, Krémenetz, Kamnitz-Podolza, Kichinev, Jsmail.

Suède. M. le Baron *Wrede*.

Il n'a pas été fait en Suède de détermination de la pesanteur depuis celle exécutée en 1825 et 1826 par M. M. *Svanberg* et *Cronstrand*.

Suisse.

Les stations suisses dans lesquelles des observations du pendule ont déjà été faites sont: Genève, Righi-Kulm, Weissenstein, Berne, Hospice du Simplon, Gäbris; elles restent encore à faire dans les observatoires de Neuchâtel et de Zurich; toutes ces stations sont reliées au réseau géodésique, et leurs coordonnées géographiques déterminées. L'appareil est le pendule à réversion de Repsold, le petit module, et la méthode employée celle de l'enregistrement chronographique des passages par la verticale. Des expériences spéciales ont été faites pour la détermination du mouvement des supports, et de la correction qui doit être appliquée pour cette cause à la longueur du pendule simple. La réduction définitive de toutes ces observations, ainsi que de celles faites avec le même instrument à Berlin, dans le bâtiment du Bureau impérial des poids et mesures, ne pourra avoir lieu que lorsque la comparaison de l'échelle du pendule avec l'étalon prototype du pavillon de Breteuil permettra d'exprimer la longueur dans l'unité métrique internationale.

Würtemberg. M. le Prof. *von Zech*.

Aucune détermination de la pesanteur n'a été faite jusqu'à présent.

Le Délégué de la **France** M. *Faye*

m'a communiqué divers projets de modification du pendule à réversion, qu'il se propose de vérifier expérimentalement, et dont il est question dans le mémoire de M. *Cellérier*; je suppose qu'il n'a pas été fait en France de nouvelles déterminations de la pesanteur depuis celles qui ont été exécutées avec le pendule invariable.

Je n'ai pas reçu de réponse directe du Coast-Survey, mais seulement le mémoire de M. *Peirce* sur les expériences qu'il a faites à Genève, Paris, Berlin, Kew et Hoboken.

L'examen de ce tableau montre un moment d'arrêt dans les recherches relatives à la détermination de la pesanteur, au moins en ce qui concerne la déduction de résultats définitifs, et cela même dans les pays dans lesquels les observations du pendule ont été faites en un certain nombre de stations, et aussi complètement réduites que l'état encore provisoire de la connaissance de quelques éléments de réduction le permettait. Cette désignation de provisoire appliquée aux éléments de réduction subsistera tant que l'unité métrique internationale n'aura pas été déterminée, que les étalons de longueur employés dans les différentes recherches scientifiques n'auront pas été comparés directement à l'étalon

prototype du Bureau international à Paris, et que leur équation et leur coefficient de dilatation n'auront pas été déterminés avec l'exactitude que comportent les appareils perfectionnés du pavillon de Breteuil. Il importe en effet, si l'on veut arriver à une uniformité dans les mesures de longueur, qui permette de rendre les résultats obtenus dans les différents pays comparables entre eux, d'écarter les comparaisons indirectes des étalons, à l'aide d'un ou plusieurs intermédiaires, auxquelles on a dû avoir recours jusqu'à présent, et de se baser uniquement sur les comparaisons directes faites avec le prototype du pavillon de Breteuil. Ce desideratum s'applique aussi bien, en ce qui concerne la détermination de la pesanteur, à l'échelle servant à mesurer l'intervalle entre les couteaux du pendule à réversion, que dans la mesure des bases géodésiques, aux règles employées, et dans les nivellements de précision, aux étalons servant à déterminer la longueur des mires. Nous ne pouvons ainsi que faire des voeux pour que les installations et les travaux préparatoires du pavillon de Breteuil permettent de commencer prochainement ces comparaisons. On peut ajouter que le résultat obtenu par Bessel pour la longueur du pendule simple à Berlin, ne pourra être comparé aux résultats obtenus ces dernières années par d'autres observateurs à l'aide du pendule à réversion, que lorsque les uns et les autres pourront être exprimés dans la même unité métrique internationale, et après la comparaison de la toise de Bessel avec le prototype du bureau international.

Une autre cause, qui a pu motiver un moment d'arrêt dans les expériences faites avec le pendule à réversion, est le doute qui s'est élevé sur la convenance d'employer cet appareil, par suite de l'erreur introduite par le mouvement des supports. M. *Peirce* a constaté, le premier, par une expérience directe que la déviation du plan de suspension résultant de la flexion du trépied de Repsold par l'application d'un poids de 1 kg pouvait non seulement être rendue visible, mais mesurée à l'aide d'un fort microscope, et les recherches de M. M. *Peirce* et *Cellérier* ont montré la possibilité d'éliminer cette cause d'erreur et de calculer la correction à apporter à la longueur du pendule simple pour tenir compte du balancement des supports. Si l'on a déterminé par des expériences directes la constante de balancement d'un instrument, c. à d. la déviation produite par l'application d'un poids de 1 kg, on peut en déduire la déviation produite par la composante horizontale du poids du pendule pendant qu'il oscille de part et d'autre de la verticale. Une série de recherches expérimentales a été faite plus tard par l'un de nous et publiée en 1878, en vue de déterminer cette déviation; il en résulte que la déviation peut être obtenue avec une exactitude largement suffisante, par un petit nombre d'expériences, et cela à l'aide d'un appareil peu compliqué, mais donnant un grossissement considérable. Ces expériences montrent l'importance de tenir compte du mouvement du support, sur lequel le trépied métallique est placé, et du fait que suivant la nature de ce support, la valeur de la déviation obtenue dans une expérience statique, par l'application d'une force horizontale, peut s'écarter plus ou moins de celle qui se produit dans une expérience dynamique par les oscillations mêmes du pendule. De là, suivant nous, la nécessité de prendre dans le calcul de la correction du pendule simple à secondes, la déviation qui a été mesurée dans les mêmes circonstances, c'est à dire celle qui est produite par les oscillations du pendule. Il nous est impossible de partager l'opinion énoncée à plusieurs reprises par M. *Peirce*, et en particulier dans l'important mémoire publié récemment: „Measurements of gravity at initial stations in America and Europe, Appendix Nr. 15". M. *Peirce* admet bien que, lorsque le trépied de Repsold repose sur un support flexible, comme le support en bois de l'Observatoire de Genève, sur lequel il a fait osciller son pendule et qui m'avait également servi pour mes expériences, la constante du balancement peut être augmentée; c'est ainsi qu'il a calculé, dans la réduction des observations qu'il a faites à Genève, l'augmentation de la déviation résultant de la flexibilité du support en bois, en réduisant pour son pendule l'augmentation que j'avais trouvée pour celui de la commission suisse. Mais pour les autres stations européennes dans lesquelles il a fait ses expériences, à Paris, à Berlin et à Kew, il a appliqué la constante du balancement résultant de ses expériences à Hoboken, où le trépied de Repsold était placé probablement sur un pilier très massif et très solidement fondé. Et cependant, à Paris, il avait trouvé une déviation plus forte qu'à Hoboken dans le rapport de 1,09 : 1, et il reconnaît lui même qu'il aurait peut-être mieux fait de l'employer. M. *Peirce* n'a pas fait, à ce qu'il paraît, des expériences sur la déviation à Berlin et à Kew, mais il ne pense pas qu'elle ait pu s'écarter sensiblement de celle trouvée à Hoboken, ce dont il compte s'assurer directement à la première occasion. Il est possible qu'à Kew la déviation fût très peu différente de ce qu'elle était à Hoboken, si le trépied de Repsold était posé sur un pilier aussi massif;[1]) mais cela n'était certainement pas le cas à Berlin, où M. *Peirce* a fait ses expériences sur le même pilier qui m'a servi plus tard, et dont la disposition défectueuse a été signalée dans le mémoire „Mouvement simultané d'un pendule et de ses supports", pages 15 et suivantes".

M. *Peirce* s'est servi de la même assise triangulaire simplement posée sur le pilier, très-solidement fondé il est vrai, mais dont les dimensions étaient trop petites pour la distance entre les pieds du trépied de Repsold; ces pieds portaient ainsi à faux en dehors du pilier et, vu le poids relativement très peu considérable de cette assise triangulaire, l'on avait certainement à craindre un mouvement de balancement du support, plus considérable dans l'expérience statique que dans l'expérience dynamique. Par les observations du pendule lui même j'ai trouvé une déviation plus forte à Berlin que sur un pilier très-massif, tel que ceux dont je m'étais servi dans les autres stations suisses, dans le rapport de 1,042 : 1, tandis que par l'expérience statique la déviation était plus forte dans le rapport de 1,19 : 1.

L'erreur sur la longueur du pendule simple à secondes, provenant du mouvement des supports, peut certainement être éliminée d'une manière très simple par la détermination expérimentale de la constante du balancement du trépied métallique posé sur un

[1]) Tant que les piliers sur lesquels le trépied métallique est posé dans différentes stations, sont pour ainsi dire identiques quant à leurs dimensions, leur masse, et la solidité des fondations, on peut sans inconvénient appliquer la même constante de balancement pour toutes.

pilier d'une masse et de dimensions déterminées; c'est ainsi qu'ont procédé M. M. *Peirce*, *von Orff* dans ses expériences faites à Bogenhausen, et que j'ai procédé également. Mais d'autres moyens ont été indiqués pour éliminer cette erreur, entre autres le pendule double proposé par M. *Faye*, sur lequel M. *Peirce* a aussi publié un mémoire. Ce système consiste à faire osciller simultanément sur le même support porté par le même trépied deux pendules aussi identiques que possible, mais en sens contraire l'un de l'autre; on peut adopter deux combinaisons différentes en plaçant les prismes portant les couteaux sur une même ligne, l'un étant dans le prolongement de l'autre, ou bien en les plaçant parallélement l'un à l'autre.

M. *Cellérier* a étudié dans le Mémoire ci-joint présenté à la Conférence la théorie du pendule double, et cela pour les deux combinaisons indiquées; il résulte de cette analyse que même pour la seconde combinaison, qui est la plus favorable, les procédés d'expérimentation seraient excessivement compliqués et difficiles pour annuler l'erreur d'influence de l'un des pendules sur l'autre.

Il serait certainement intéressant de tenter ce mode d'expérimentation avec le pendule double, ce qui n'a pas été fait jusqu'à présent, et de comparer les résultats obtenus avec ceux qui auraient été déduits pour la même localité de l'emploi du pendule à réversion ordinaire, après avoir tenu compte de l'erreur du balancement. Mais nous ne pensons pas, qu'en raison des difficultés inhérentes à l'expérience, ce système puisse avoir une application pratique pour la détermination de la pesanteur dans les différentes localités; l'appareil deviendrait beaucoup plus volumineux et d'un transport difficile d'un endroit à l'autre. Il se présente encore une autre considération; les observations du pendule à réversion, d'après le type de Repsold, ont été faites déjà dans un assez grand nombre de stations dans différents pays, il y a par conséquent un grand intérêt à en tirer parti, en déterminant, ou en éliminant l'erreur provenant du balancement des supports. Dans le cas où, ce qui parait fort douteux, les expériences faites avec le pendule double montreraient la possibilité pratique de se servir de cet appareil nouveau, tout le matériel des expériences antérieures devrait être mis de côté si la constante du balancement n'était pas déterminée directement, et la détermination de la pesanteur devrait être reprise ab ovo pour chaque station avec le pendule double. Mais il y a un moyen de tirer parti des expériences déjà faites avec le pendule à réversion par le procédé proposé par M. *Cellérier* et développé dans son mémoire; ce procédé consiste à faire faire un second pendule, aussi semblable que possible au premier sous le rapport de la distance entre les couteaux, sans qu'une égalité rigoureuse fût nécessaire, mais d'un poids total assez différent, la moitié, ou les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ par exemple. On répéterait dans chaque localité avec le même trépied, et sur le même support, avec ce second pendule la même série d'expériences dans les deux modes de suspension que celles qui avaient été faites avec le premier pendule; la constante du balancement serait la même pour les deux pendules; mais comme dans les deux modes de suspension la correction sur la durée de l'oscillation est proportionelle au poids du pendule, et que celui-ci varie dans un rapport considérable de l'un à l'autre, l'on éliminerait l'effet provenant du balancement des supports par la comparaison des durées d'oscillation obtenues avec les deux pendules, de la même manière que dans le pendule à réversion les erreurs provenant des imperfections de construction, de l'influence de l'air et du frottement sont éliminées par la comparaison des durées d'oscillation obtenues dans les deux modes de suspension.

En faisant usage de ce procédé, on conserverait tout l'ancien appareil, le trépied, le prisme de suspension, le comparateur, l'échelle etc. et l'on utiliserait les anciennes observations en leur adjoignant une série d'expériences analogues faites avec un second pendule. Il importe que le rapport entre les poids des deux pendules s'écarte assez de l'unité, pour que les erreurs d'observation dans la durée d'une oscillation n'aient pas une trop grande influence sur la différence dans la durée causée par le poids du pendule, et, de plus, il nous semble préférable que le second pendule soit d'un poids moindre que le premier. Nous pensons que le poids donné par Repsold à ses pendules, savoir plus de 6 kg pour ceux qui font une oscillation dans une seconde, de 3 kg pour ceux dont l'oscillation est de $\frac{3}{4}$ de seconde, est plustôt trop considérable, et qu'il y aurait de l'avantage à le diminuer. Il n'y a pas de doute qu'un poids aussi considérable ne tende à amener plus vite la déformation et l'émoussement du tranchant des conteaux, et qu'à la suite d'un usage prolongé l'instrument ne se trouve plus dans les mêmes conditions; avec un pendule plus léger, mais naturellement aussi en métal, cet inconvénient serait notablement diminué.

A l'occasion du mémoire déjà cité de M. *Peirce* sur le résultat de ses expériences faites à Genève, à Paris, à Berlin, à Kew et à Hoboken, nous ne pouvons que faire ressortir l'importance des observations faites dans une même localité avec les appareils employés dans les différents pays. C'est ainsi qu'à Berlin on a, outre la détermination de la longueur du pendule à secondes faite par *Bessel*, celle obtenue par le pendule à réversion de l'institut géodésique de Prusse, par le pendule de la commission géodésique de l'empire d'Autriche, par le pendule américain de M. *Peirce*, enfin par le pendule de la commission géodésique suisse, ce dernier faisant une oscillation dans $\frac{3}{4}$ de seconde, tandis que la longueur des trois autres pendules est d'un mètre environ. Il est impossible de songer à la comparaison des résultats obtenus avec ces différents appareils, avant que les échelles aient été comparées au prototype du pavillon de Breteuil, de façon à ce que toutes les longueurs soient exprimées dans la même unité métrique internationale, et avant que l'erreur provenant du mouvement des supports ait été déterminée, ou éliminée, pour chacun d'eux, soit par des expériences directes, soit par le procédé indiqué plus haut.

E. Plantamour. *C. Cellérier.*

217